Monotone Error Structure and Local Weight Distribution of Linear Codes

(線形符号の単調誤り構造と局所重み分布)

マルチメディア工学専攻　セキュリティ工学講座
安永　憲司

２００７年１０月３０日

学位論文の構成

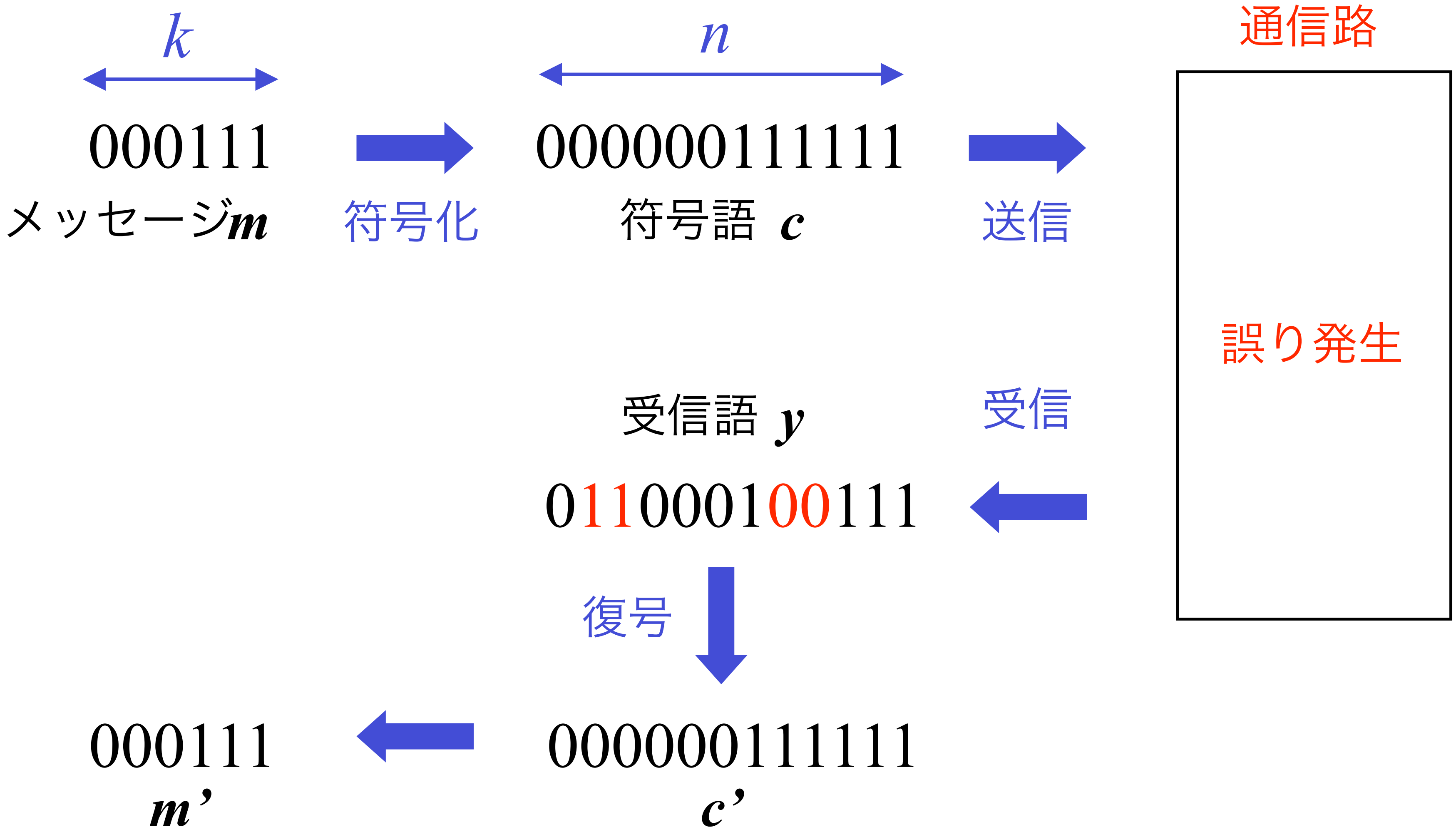
- 第１章 序論
- 第２章 線形符号
- 第３章 訂正不可能誤りの単調構造
- 第４章 局所重み分布間の関係
- 第５章 局所重み分布計算のアルゴリズム
- 第６章 結論

第1章 序論

第2章 線形符号

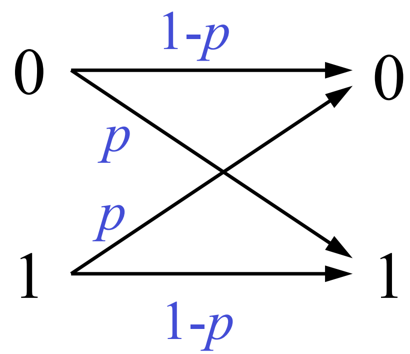
誤り訂正符号

- 雑音のある通信路において高信頼通信を実現



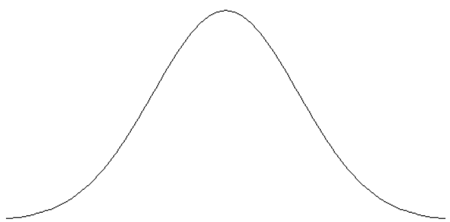
通信路モデル

２元対称通信路(BSC)



- 各ビット毎に０と１を一定確率で反転
- 離散通信路
  - 受信語 $y \in \{0,1\}^n$

加法的白色ガウス雑音通信路(AWGNC)



- 各ビット毎に白色ガウス雑音を付加
- 連続通信路
  - 受信語 $y \in R^n$

線形符号とその性能評価

線形符号

- 符号：符号語の集合，線形符号：線形空間をなす符号
- (n, k) 線形符号 C
  - 符号長(符号語の長さ) n, 情報記号数(メッセージの長さ) k
  - $C \subseteq \{0, 1\}^n$, $|C|=2^k$
- 符号の最小距離 d : 異なる符号語間の最小ハミング距離

$$d = \min_{c_1, c_2 \in C} d_H(c_1, c_2)$$

符号の性能評価

- 誤り確率：他の符号語に復号してしまう確率
- 最適な復号：誤り確率を最小にする復号
- 最小距離復号：受信語から最も距離の近い符号語へ復号
  - BSC, AWGNC では最適な復号法

第３章で取り組む問題

離散通信路（BSCなど）において

- 受信語 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}$　$\boldsymbol{e}$: 誤りベクトル

$$
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{y} & 011000100111 \\
& \quad\quad\quad \| \\
\boldsymbol{c} & 000000111111 \\
& \quad\quad\quad + \\
\boldsymbol{e} & 011000011000
\end{array}
$$

誤りベクトルの重み＝発生した誤りの数

- (誤りベクトルの重み) $< d/2$ $\Rightarrow$ 100%訂正可能　d : 最小距離

- (誤りベクトルの重み) $\geqq d/2 \Rightarrow$???

誤りの重み $\geqq d/2$ のとき、
最小距離復号を行った場合、
訂正可能な誤りはどのくらい存在するか？
　$\Rightarrow$　第3章

第４章・第５章で取り組む問題

離散通信路(AWGNC)において

- 符号の訂正能力 → 最適復号したときの誤り確率で評価

- 誤り確率の正確な値は計算困難 → 上界・下界
  - 符号の重み分布などを利用した上界・下界

- 局所重み分布による、より正確な評価の可能性
  - ある基本的な上界には、適用することで精度が向上

- 導出は、重み分布より困難

⇒ 第４章・第５章にて、局所重み分布の導出方法

学位論文の構成

- 第１章 序論
- 第２章 線形符号
  - 線形符号の基本的性質、符号の構成法
- 第３章 訂正不可能誤りの単調構造
  - 訂正不可能誤り数の正確な値や上界・下界の導出
- 第４章 局所重み分布間の関係
  - 局所重み分布間の関係を解明
- 第５章 局所重み分布計算のアルゴリズム
  - アルゴリズムを提案し、局所重み分布を計算
- 第６章 結論

以降で説明

第３章 訂正不可能誤りの単調構造

関連業績

国際会議(査読付)

[2-3] Kenji Yasunaga and Toru Fujiwara, “Correctable errors of weight half the minimum distance plus one for the first-order Reed-Muller codes,” in *Proceedings of The 17th Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms, and Error Correcting Codes (AAECC-17), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 2007*, to appear.

その他会議・研究会等

[3-8] Kenji Yasunaga and Toru Fujiwara, “Correctable errors of weight half the minimum distance for the first-order Reed-Muller codes,” in *Proceedings of the 29th Symposium on Information Theory and Its Applications (SITA2006)*, pp. 5–8, November 2006.

[3-9] Kenji Yasunaga and Toru Fujiwara, “On trial set and uncorrectable errors for the first-order Reed-Muller codes,” in *Proceedings of 2007 Hawaii and SITA Joint Conference on Information Theory (HISC2007)*, pp. 67–72, May 2007.

[3-10] Kenji Yasunaga and Toru Fujiwara, “Minimum weight codewords in trial sets,” in *Proceedings of the 30th Symposium on Information Theory and Its Applications (SITA2007)*, to appear.

研究内容

- （離散通信路で、最小距離復号をした場合の）訂正不可能誤りの単調構造について

おもな研究成果

- １次Reed-Muller符号に対し
  - (成果1) 訂正可能・不可能な重み $d/2$ の誤りベクトルの数を導出
  - (成果2) 訂正可能・不可能な重み $d/2+1$ の誤りベクトルの数を導出
- 一般の符号に対し
  - （成果3） ある条件を満たす符号に対し、訂正不可能な重み $d/2$ の誤りベクトル数の上界・下界を導出

(成果1)と(成果2)について

1次Reed-Muller符号に対し、訂正可能な重み $d/2$, $d/2+1$ の誤りベクトルの数を導出

- 訂正可能誤りベクトル数の正確な値を導出（符号理論）
- m 変数ブール関数の非線形性 2^{m-2}, $2^{m-2}+1$ をもつ関数の数を導出（暗号理論等）
  - ブール関数の非線形性は、暗号システム（対称鍵暗号、ストリーム暗号）の安全性指標として重要

ブール関数 f の非線形性 : f が線形関数からどのくらい離れているか

$$NL(f) = \min_{g \in L_m} \{ \Pr_{(x_1,...,x_m) \in \{0,1\}^m} [f(x_1, ..., x_m) \neq g(x_1, ..., x_m)] \cdot 2^m \}$$

L_m : m 変数アフィン関数集合

誤りの単調性（1/2）

離散通信路で、最小距離復号を行うとき

- 訂正可能な誤りに選択の余地（受信語から最近に複数の符号語）

$\Rightarrow$ 辞書順で最小の誤りを訂正

$\Rightarrow$ 誤りが単調性を持つ

辞書順

$000 \to 001 \to 010 \to 011$
$\to 100 \to 101 \to 110 \to 111$

<u>ベクトルのカバー関係</u>

- $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ にカバーされる $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$ $\Leftrightarrow$ $x_i=1$ ならば $y_i=1$

$\boldsymbol{x} =$ 0110 は

$$\boldsymbol{y} = \left\{ \begin{matrix} 1110 \\ 0111 \\ 1111 \end{matrix} \right\}$$ にカバーされる

誤りの単調性（2/2）

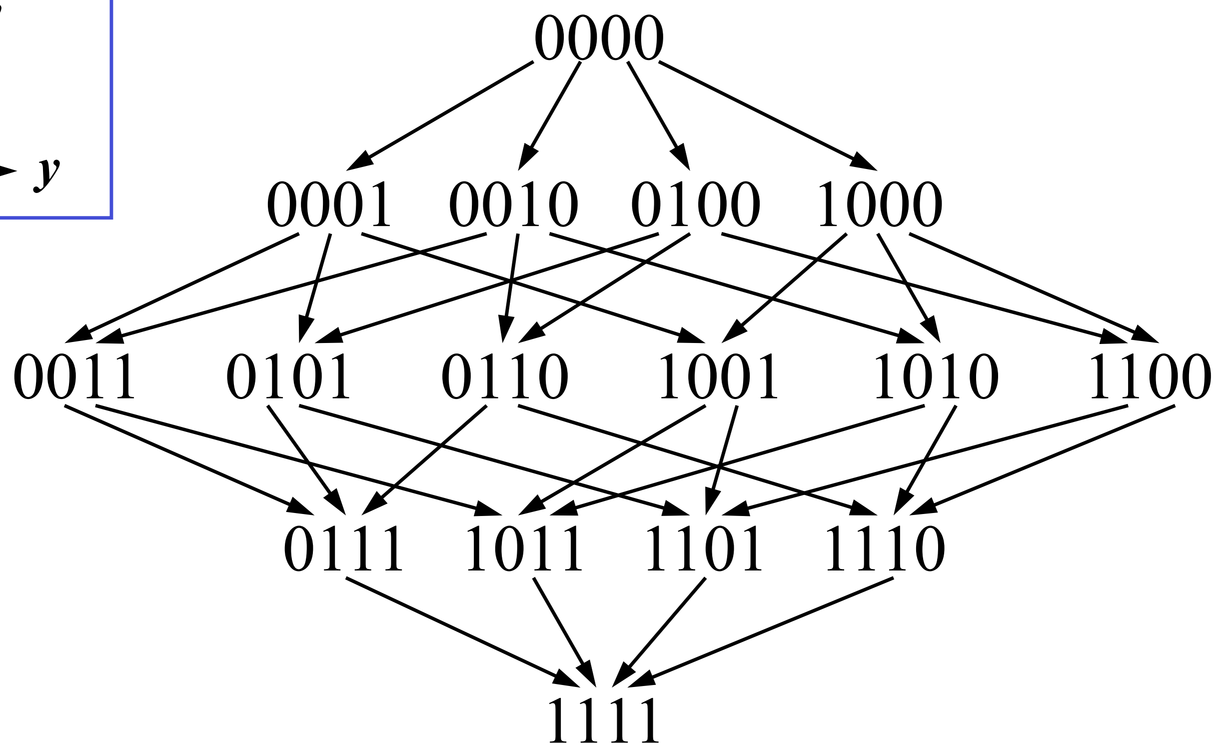
誤りの単調性

- x が訂正可能　 $\Rightarrow$ $v \subseteq x$ なる v もすべて訂正可能
  y が訂正不可能 $\Rightarrow$ $y \subseteq u$ なる u もすべて訂正不可能

$x \subseteq y$

$\Leftrightarrow$

$x \longrightarrow y$



誤りの単調性（2/2）

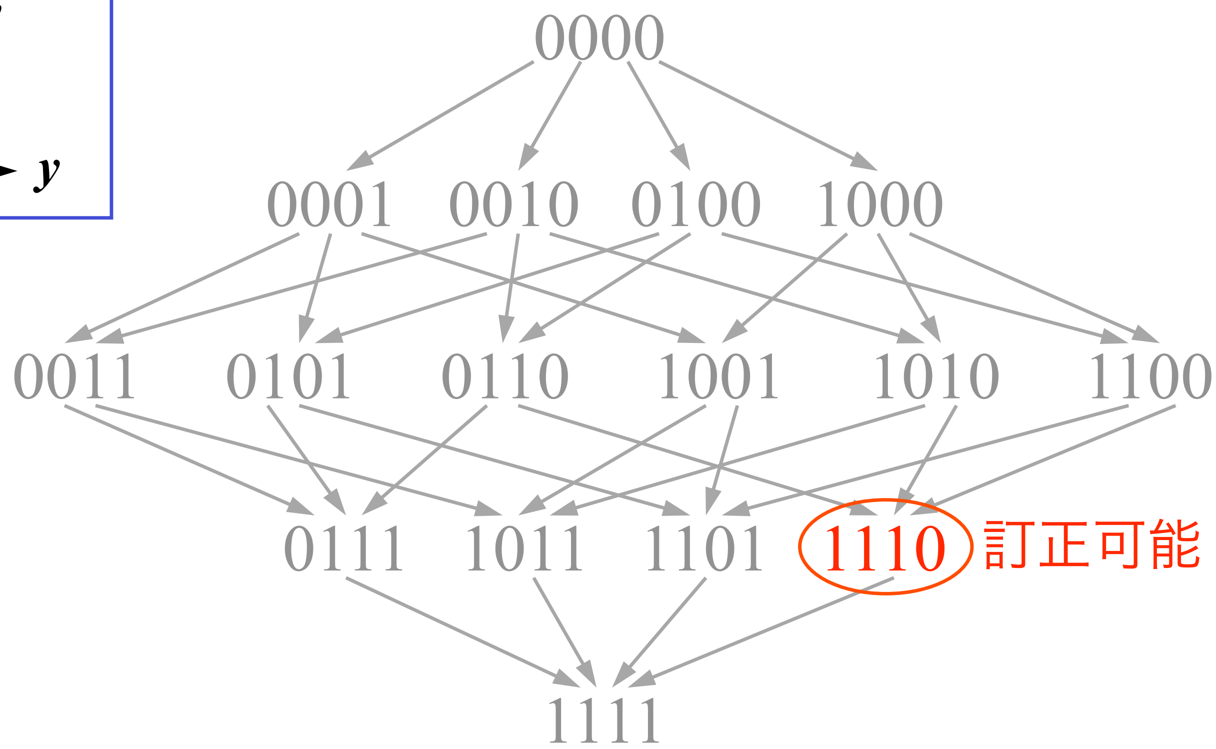
誤りの単調性

- $\boldsymbol{x}$ が訂正可能　$\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} \subseteq \boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{v}$ もすべて訂正可能
  $\boldsymbol{y}$ が訂正不可能 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{u}$ なる $\boldsymbol{u}$ もすべて訂正不可能

$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$

$\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y}$

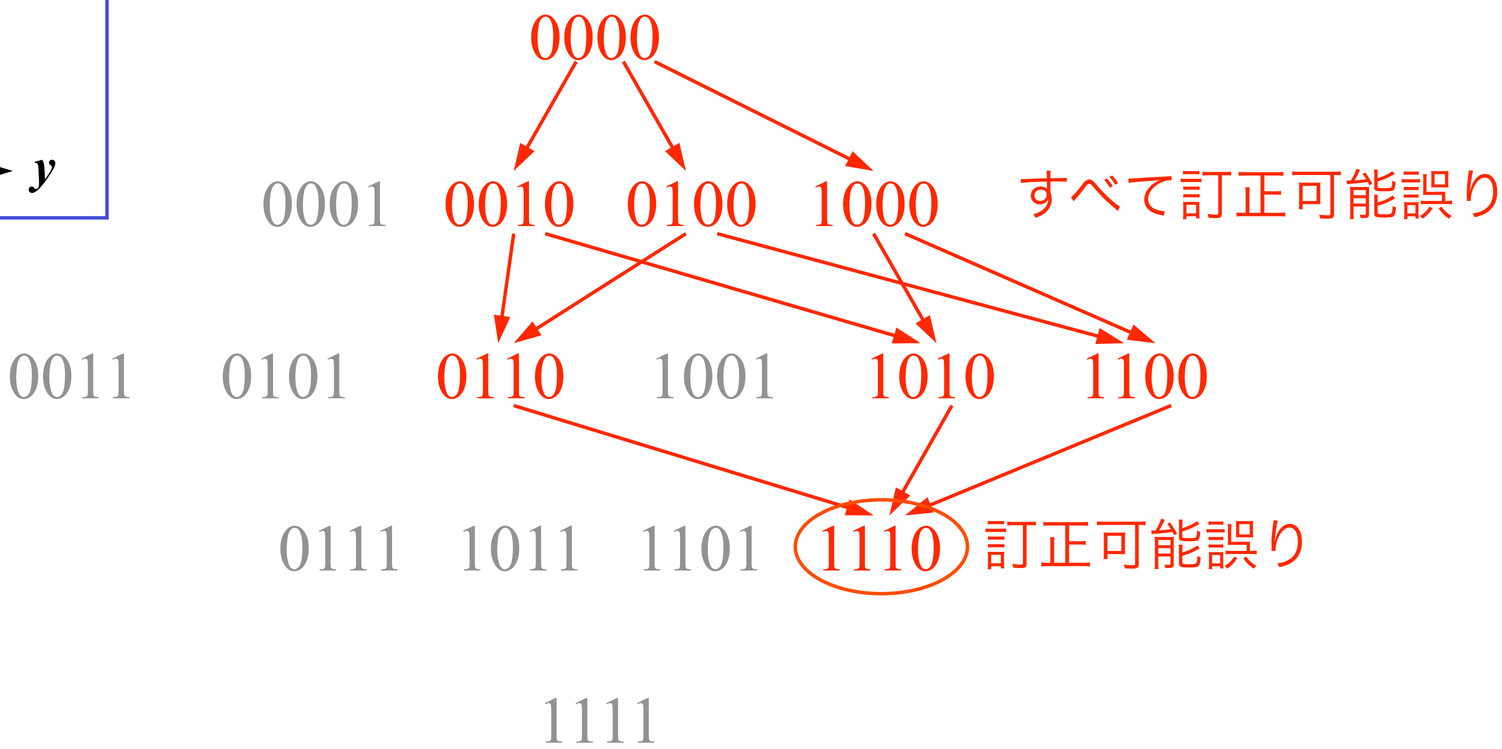


誤りの単調性（2/2）

誤りの単調性

- $\boldsymbol{x}$ が訂正可能　$\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} \subseteq \boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{v}$ もすべて訂正可能
  $\boldsymbol{y}$ が訂正不可能 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{u}$ なる $\boldsymbol{u}$ もすべて訂正不可能

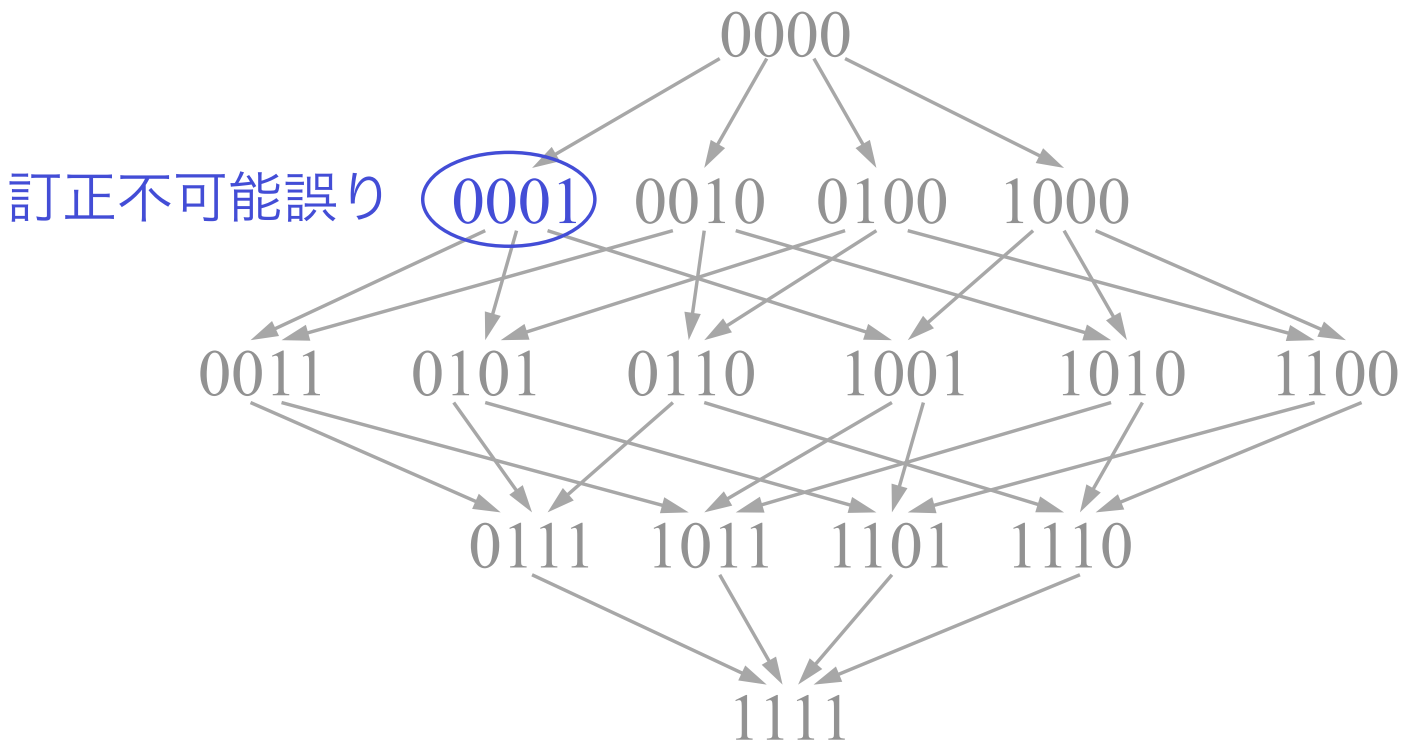
$$\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{y}$$



誤りの単調性（2/2）

<u>誤りの単調性</u>

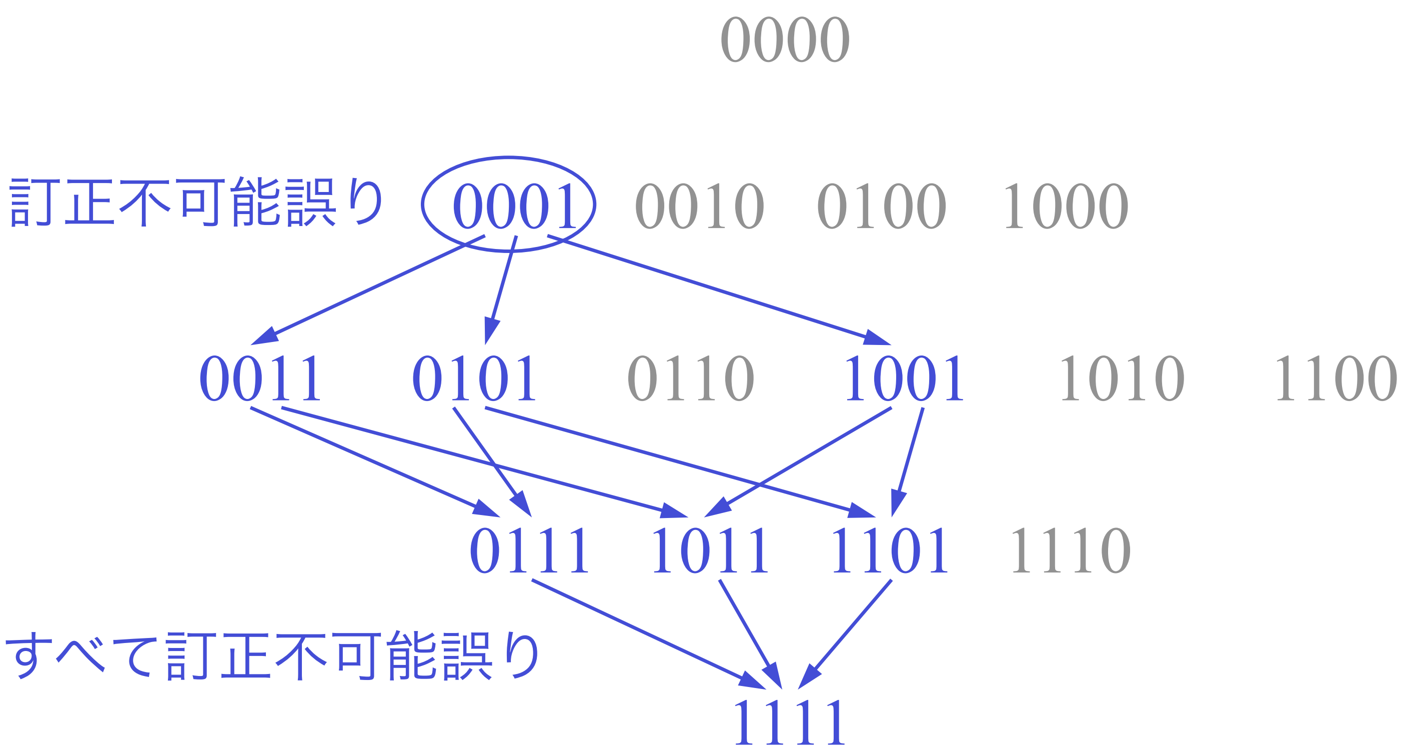
- $\boldsymbol{x}$ が訂正可能　$\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} \subseteq \boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{v}$ もすべて訂正可能
  $\boldsymbol{y}$ が訂正不可能 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{u}$ なる $\boldsymbol{u}$ もすべて訂正不可能



誤りの単調性（2/2）

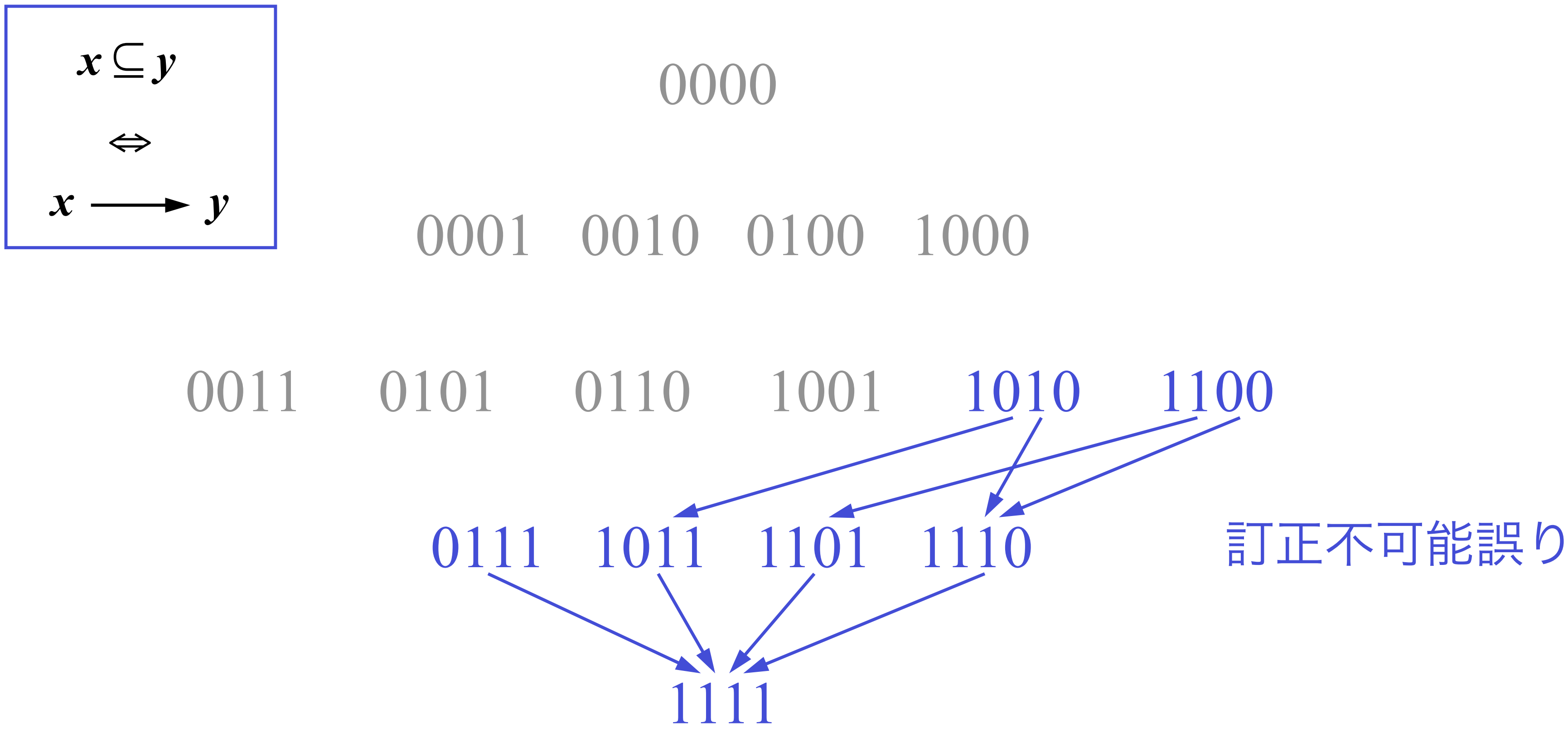
誤りの単調性

- $\boldsymbol{x}$ が訂正可能　　$\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} \subseteq \boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{v}$ もすべて訂正可能
  $\boldsymbol{y}$ が訂正不可能 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{u}$ なる $\boldsymbol{u}$ もすべて訂正不可能



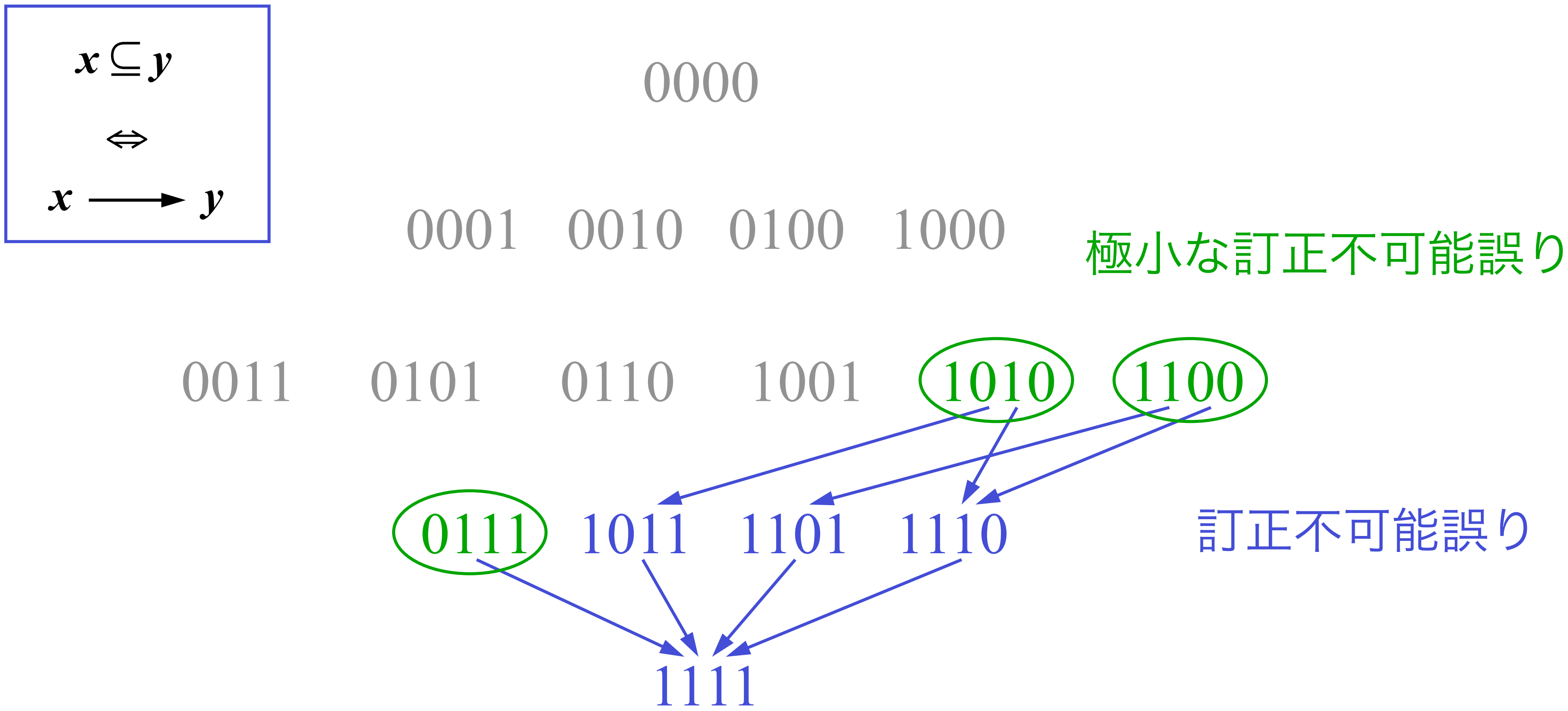
単調性があるとき

- 訂正不可能誤りは $M^1(C)$ によって特徴付けられる
  - $M^1(C)$: カバー($\subseteq$)に関して極小な訂正不可能誤り
  - $M^1(C)$ が決まれば訂正不可能誤りは一意に決まる



単調性があるとき

- 訂正不可能誤りは $M^1(C)$ によって特徴付けられる
  - $M^1(C)$: カバー(⊆)に関して極小な訂正不可能誤り
  - $M^1(C)$ が決まれば訂正不可能誤りは一意に決まる



単調性を利用した既存の研究

Zémor (1993)

- BSCでの誤り確率が閾値的振る舞いをすることを示した

Helleseth, Kløve, Levenshtein (2005)

- 重み≧$d/2$ の訂正可能誤りの割合について漸近的分析
- $M^1(C)$ を特徴付ける概念 Larger Half (LH) を導入
  - $M^1(C) \subseteq LH(C \setminus \{\mathbf{0}\})$
- トライアル集合 T を導入
  - $M^1(C) \subseteq LH(T)$ を満たす集合 $T \subseteq C \setminus \{\mathbf{0}\}$
  - T を利用した訂正不可能誤りベクトル数の上界を導出

本研究では、
1次Reed-Muller符号に対し、LHを利用した分析
一般の符号に対し、トライアル集合を利用した分析

1次Reed-Muller符号に対する成果

（成果1）　訂正可能な重み $d/2$ の誤りベクトルの数を導出

- この結果は、Wu (1998) によって既に導出されているが、LHを利用することでより単純な証明を与えた

(成果2) 訂正可能な重み $d/2+1$ の誤りベクトルの数を導出

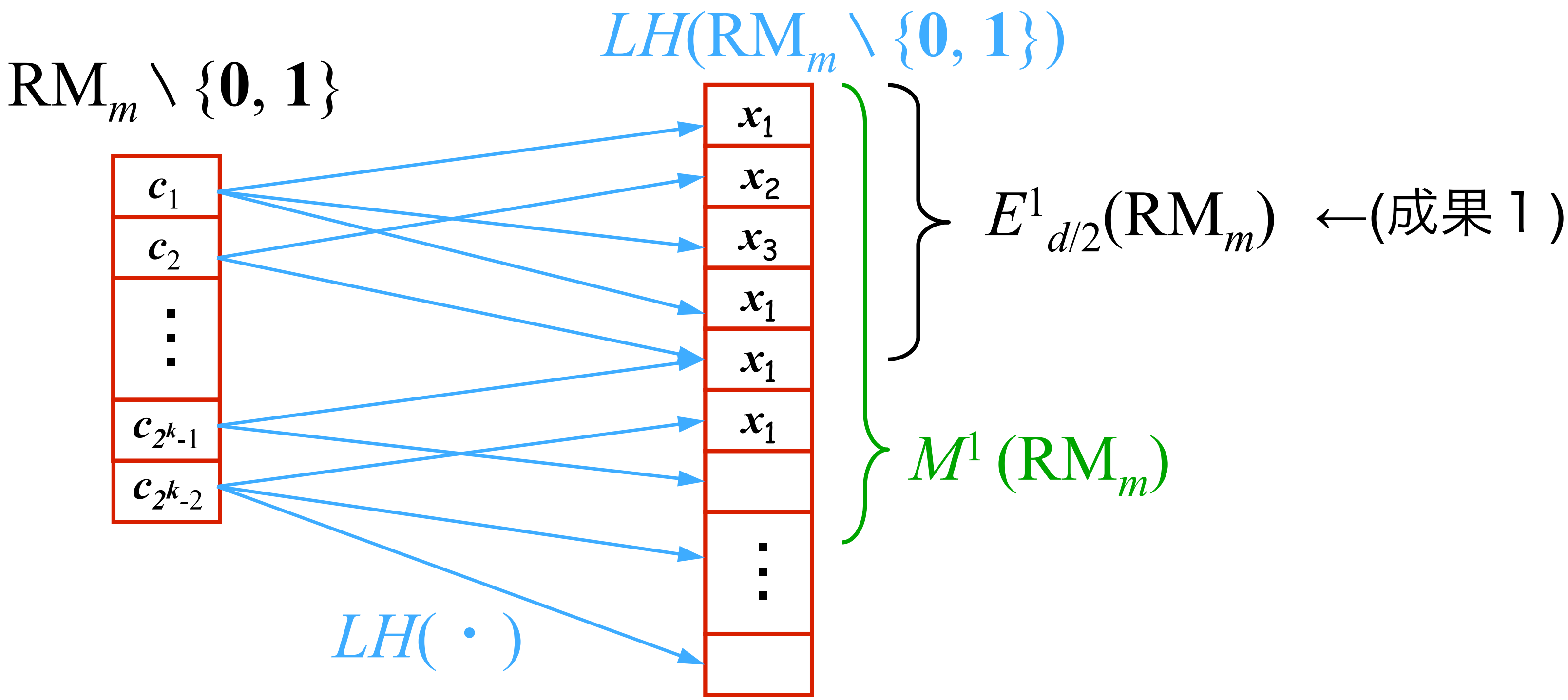
$$|E^0_{2^{m-2}+1}(\mathrm{RM}_m)| = \binom{2^m}{2^{m-2}+1} - 4(2^m-1)(2^{m-3}+1)\binom{2^{m-1}}{2^{m-2}+1} + (4^{m-2}+3)\binom{2^m}{3}$$

1次Reed-Muller符号は、$n = 2^m$, $d = 2^{m-1}$

・ Wu, “On distribution of Boolean functions with nonlinearity $\le 2^{n-2}$,” *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 17, pp. 51-59, March 1998.

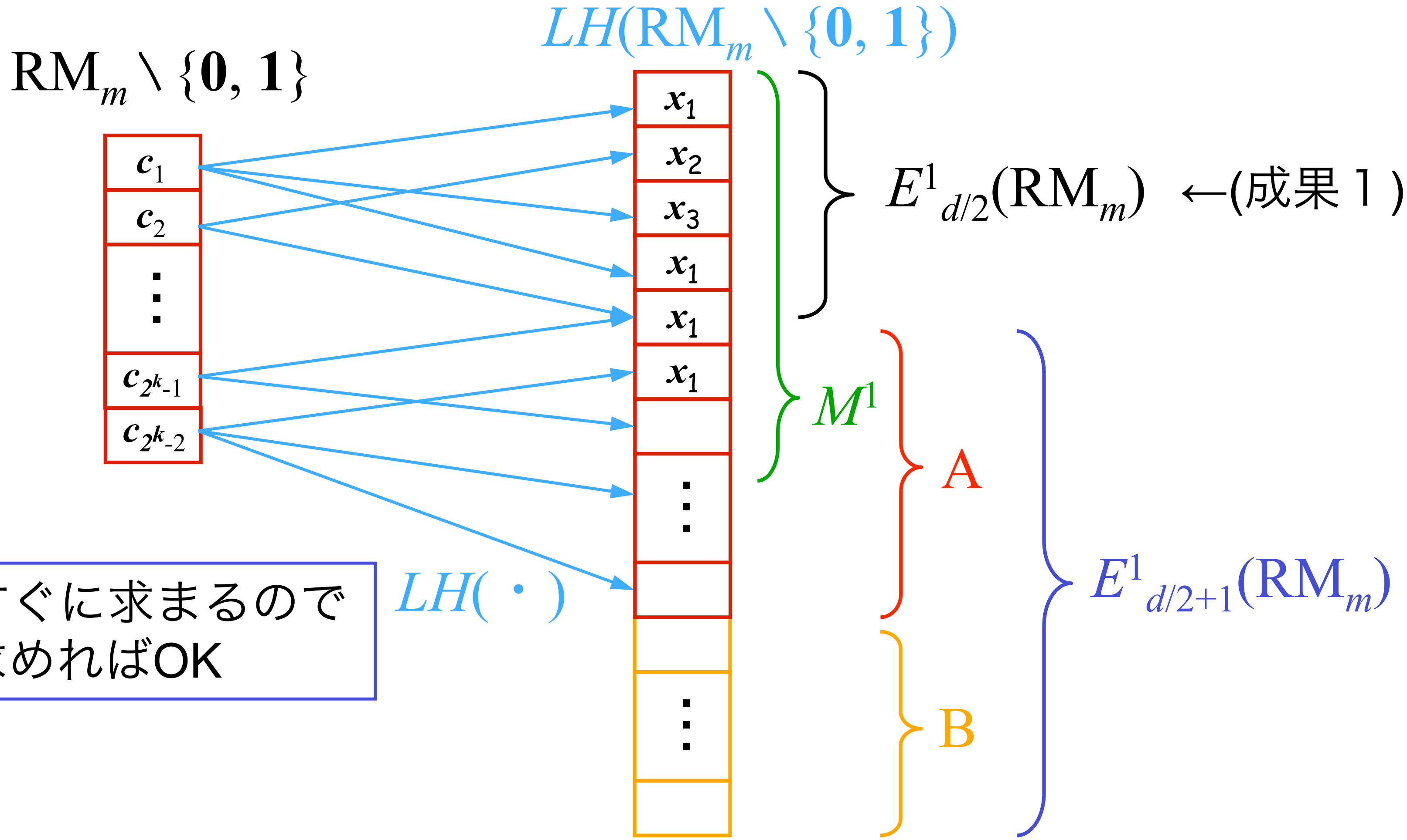
(成果2)の導出方法の概略

RM_m : 符号長 2^m の1次Reed-Muller符号
$E^1{}_w(\mathrm{RM}_m)$: RM_m で訂正不可能な重み w の誤りベクトル集合



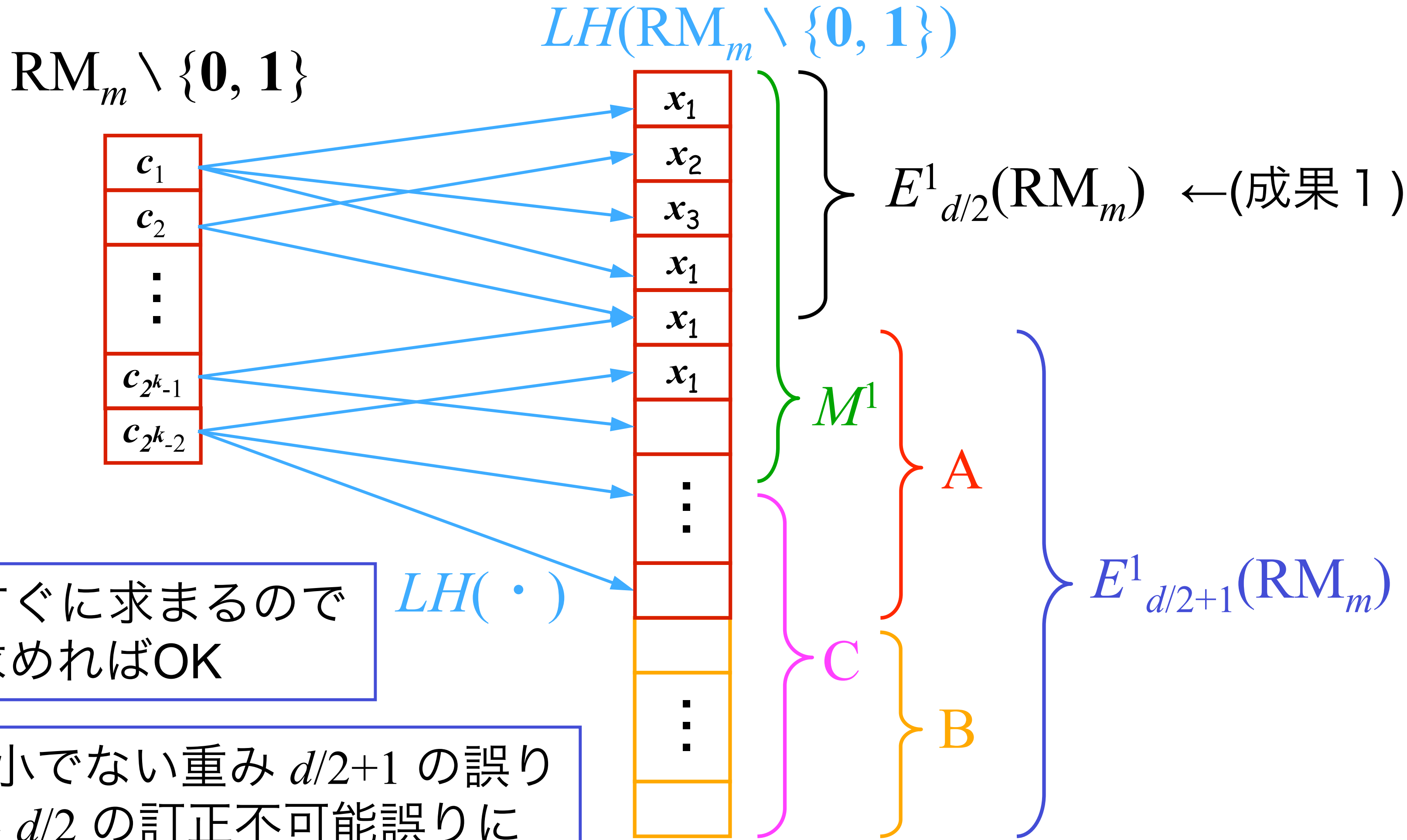
$M^1(\mathrm{RM}_m) \subseteq LH(\mathrm{RM}_m \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$ が成立

(成果2)の導出方法の概略



|A| はすぐに求まるので
|B| を求めればOK

(成果2)の導出方法の概略



|A| はすぐに求まるので
|B| を求めればOK

C は極小でない重み $d/2+1$ の誤り
⇒ 重み $d/2$ の訂正不可能誤りに
　１ ビット付加したもの

⇒ そのようなベクトル集合を $E^1{}_{d/2}(\mathrm{RM}_m)$ から構成し、
　A に含まれるもの、重なってしまうものを除外することで |B| を求める

結果の考察

(成果2) 訂正可能な重み $d/2+1$ の誤りベクトルの数

- 数値例（符号長 2^m）

m	n	k	訂正可能誤り数	訂正不可能誤り数
5	32	6	21,288,320	6,760,480
6	64	7	1.378×10^{15}	1.238×10^{12}
7	128	8	4.299×10^{30}	1.535×10^{22}
8	256	9	5.625×10^{61}	7.938×10^{41}
9	512	10	1.329×10^{124}	7.605×10^{80}

- $m = 9$ のとき、 訂正不可能な誤りは 10^{44} 個に 1 個の割合

一般の符号に対する成果

- トライアル集合 T： $M^1(C) \subseteq LH(T)$ を満たす $T \subseteq C \setminus \{\mathbf{0}\}$
- C_d： C の最小重み符号語集合

(成果3’) 必ず $C_d \subseteq T$ であるための十分条件を導出

$\Rightarrow$ 符号長の長いReed-Muller符号、符号長 128, 情報記号数64以下の拡大原始BCH符号などが当てはまる

（成果3） $C_d \subseteq T$ かつ d が偶数の符号に対し、訂正不可能な重み $d/2$ の誤りベクトル数の上界・下界を導出

$$\left(\frac{1}{2}\binom{d}{d/2} - |C_d|\right)|C_d| \le |E^1_{d/2}(C)| \le \frac{1}{2}\binom{d}{d/2}|C_d|$$

符号長の長いReed-Muller符号ではタイト

第４章 局所重み分布間の関係

関連業績

学術論文誌

[1-1] Kenji Yasunaga and Toru Fujiwara, “Determination of the local weight distribution of binary linear block codes,” *IEEE Transactions on Information Theory,* vol. 52, no. 10, pp. 4444–4454, October 2006.

研究内容

局所重み分布間の関係について

研究成果

- 符号 C とその拡大符号 C_{ex} ・偶部分符号 C_{even} の局所重み分布間の関係を明らかにした

拡大符号　　: 各符号語にパリティビットを付加
偶部分符号 : 重み偶数の符号語からなる部分符号

局所重み分布

- 極小符号語の重み分布
  - 極小符号語 : 符号語の中でカバー（⊆）に関して極小なもの
  - 重み分布 : ベクトルの数を重みの違いで分類したもの

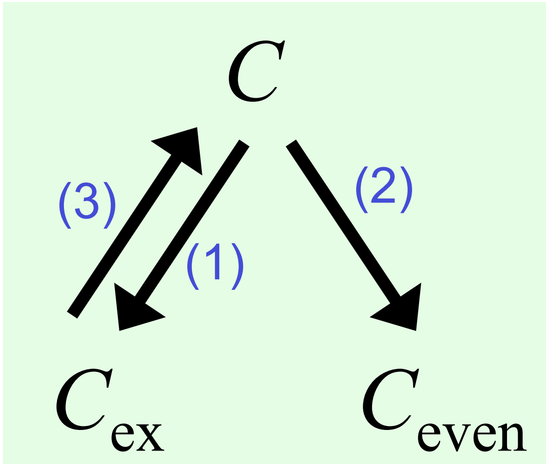
C の極小符号語 = { 1010, 1001, 0111} ⇒ C の局所重み分布 (0, 0, 2, 1, 0)

重み2が2つ、重み3が1つ

- 応用
  - AWGNCにおける誤り率の上界・下界の改善
  - 最小距離復号
  - （暗号理論）線形秘密分散法のアクセス構造に一致
- 導出法
  - 単純な方法(すべての符号語に対し、極小かどうか検査)
    ⇒ 計算時間 : $O(n^2k2^k)$

本章での成果

C : 元の符号, C_{ex} : 拡大符号, C_{even} : 偶部分符号
$LWD(C)$: C の局所重み分布
$N(C)$: C の奇数重み分解可能符号語の数



(成果1) $LWD(C), N(C) \Rightarrow LWD(C_{\mathrm{ex}})$

(成果2) $LWD(C), N(C) \Rightarrow LWD(C_{\mathrm{even}})$

(成果3) C_{ex} が推移不変符号(Reed-Muller, 拡大BCH)のとき
$LWD(C_{\mathrm{ex}}), N(C_{\mathrm{ex}}) \Rightarrow LWD(C)$

(成果4) C の重みがすべて４の倍数 $\Rightarrow$ $N(C) = 0$
符号長 128 以上のReed-Muller符号
(128, k) 拡大原始BCH符号 $k \leqq 57$

関連研究

Borissov, Manev (2004)

- 拡大符号, 偶部分符号, 推移不変符号との関係
  - (成果1)〜(成果3)の部分結果
    - 独立に得られた成果
    - [1-1] の論文採録後に知る
  - $N(C)$ の議論はしておらず、分布間関係の一部を明らかにしている

・ Borissov and Manev, “Minimal codewords in linear codes,” *Serdica Mathematical Journal*,
vol. 30, no. 2-3, pp. 303-324, 2004.

[1-1] Kenji Yasunaga and Toru Fujiwara, “Determination of the local weight distribution of binary linear block codes,” *IEEE Transactions on Information Theory,* vol. 52, no. 10, pp. 4444–4454, October 2006

第５章 局所重み分布計算アルゴリズム

関連業績

学術論文誌

[1-1] Kenji Yasunaga and Toru Fujiwara, “Determination of the local weight distribution of binary linear block codes,” *IEEE Transactions on Information Theory,* vol. 52, no. 10, pp. 4444–4454, October 2006.

[1-2] Kenji Yasunaga, Toru Fujiwara, and Tadao Kasami, “Local weight distribution of the (256, 93) third-order binary Reed-Muller code,” *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences (Letter)*, vol. E90-A, no. 3, pp. 698–701, March 2007.

研究内容

局所重み分布計算のアルゴリズムについて

研究成果

- 局所重み分布計算アルゴリズムの提案とその改良
  - アイディア :極小符号語の置換不変性、コセット分割
  - 計算量 : 自己同型群が大きいほど、単純な方法と比べ大きく削減
    - 拡大原始BCH符号、Reed-Muller符号
- 以下の符号に対して、局所重み分布を導出
  - 拡大原始BCH符号, 原始BCH符号, Reed-Muller符号, パンクチャドReed-Muller符号

パンクチャドReed-Muller符号 : 拡大符号がReed-Muller符号である符号

関連研究（従来法）

毛利, 本田, 森井 (2003)

- 巡回符号に対する計算アルゴリズム
  - 自己同型群を巡回置換群に限定したアルゴリズム
    - 巡回置換群のサイズ ・・・ $O(n)$
    - アフィン置換群(拡大原始BCH符号) ・・・ $O(n^2)$
    - 一般化アフィン置換群(Reed-Muller符号) ・・・ $2^{O(n \log n)}$
- 符号長 63 の原始BCH符号の分布を導出

・ 毛利, 本田, 森井, “２元 (n, k) 巡回符号の局所重み分布を求める方法,” 電子情報通信
学会論文誌A, vol. J86-A, pp. 60-74, 2003年1月

提案アルゴリズムのアイディア

- 極小符号語の置換不変性
  - $\boldsymbol{c} \in C$ が極小　$\Leftrightarrow P \in \mathrm{Aut}(C)$ に対し、$P(\boldsymbol{c})$ も極小

    $P : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$　ベクトル置換

    $\mathrm{Aut}(C) := \{ P : P(C) = C \}$　C の自己同型群

$\Rightarrow$ ベクトル置換で得られる符号語は、極小性を調べなくてよい

- コセット分割
  - C' : C の線形部分符号
  - C' による C のコセット分割 = C/C'

$\Rightarrow$ ベクトル置換で得られる符号語を探す手間を削減

提案アルゴリズムの改良

- 符号の木構造を考慮

⇒ 複数の符号語に対する極小性検査をまとめることで、計算時間を削減

- アルゴリズムの再帰的利用
  - コセットを線形部分符号 $C'' \subseteq C'$ によってさらにコセット分割

⇒ ベクトル置換で得られる符号語をさらに効率的に探す

求めた局所重み分布

- (128, k) 拡大原始BCH符号(k = 50, 43, 36)
  - 提案アルゴリズムを利用
  - (128,50) 拡大原始BCH符号 ・・・ 従来法の 1/130 の 440 時間
- (127, k) 原始BCH符号(k = 50, 43, 36) とその偶部分符号
  - 第４章の関係を利用
  - 提案アルゴリズムでは求めることができなかった

- (128, 64), (256, 93) Reed-Muller符号
  - 改良した提案アルゴリズムを利用
  - (128,64) Reed-Muller符号 ・・・ 従来法の 15 億分の １ の 13 時間
- (127, 64), (255, 93) パンクチャドReed-Muller符号とその偶部分符号
  - 第４章の関係を利用
  - 提案アルゴリズムでは求めることができなかった

誤り率の上界・下界の改善

安田,安永,藤原(2005), 安田(2006)

- AWGNCにおける誤り率の上界・下界の改善
  - Poltyrev上界・Seguin下界に対し、重み分布を局所重み分布に置き換え可能であることを示し、実際に評価
  - 今回求めた符号については、大きな改善は見られなかった
  - 符号化レート k/n が高い符号に対し、下界が大きく改善
    - 提案アルゴリズムはレートが大きくなるにつれ、計算量が大きくなる

- 安田,安永,藤原, “Seguin 下界の局所重み分布を用いた改善,” 第２８回情報理論とその応用学会(SITA2005)予稿集, pp.435-438, 2005.
- 安田 隆弘, “線形符号の復号誤り率の下界, 上界の局所重み分布を用いた改善,“ 大阪大学大学院情報科学研究科 修士学位論文, 2006.

第６章 結論

本研究のまとめ(1/2)

- 訂正不可能誤りの単調構造について（第３章）

(おもな成果)

- 1次Reed-Muller符号の、重み $d/2$, $d/2+1$ の訂正不可能誤り数を導出
- 一般の符号に対し、ある条件を満たす符号について、
  重み $d/2$ の訂正不可能誤り数の上界・下界を導出

(本研究の貢献)

- 単調構造・LH を利用した、訂正不可能誤り数の導出方法を示したこと
  - １次Reed-Muller符号で重み $d/2+1$ について導出
- トライアル集合を利用した訂正不可能誤り数の分析方法を示したこと

本研究のまとめ(2/2)

- 局所重み分布の導出について(第４章、第５章)

(おもな成果)

- 拡大符号、偶部分符号の局所重み分布間の関係を解明
- 局所重み分布計算アルゴリズムを提案
- 原始BCH符号やReed-Muller符号などの分布を導出

(本研究の貢献)

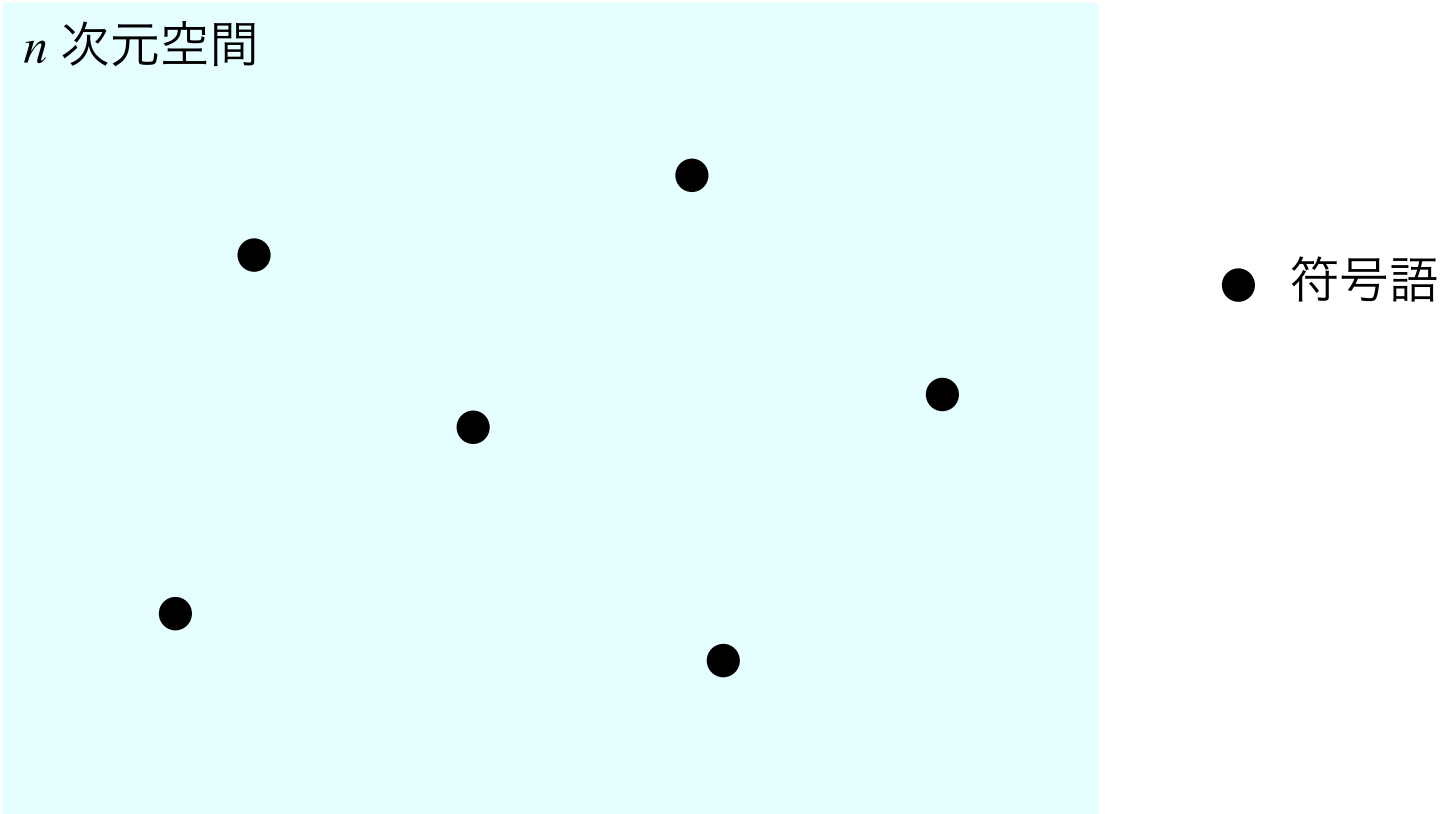
- BCH符号・Reed-Muller符号等の代表的な符号に対し局所重み分布を導出したこと
- 拡大化・パンクチャド化・偶部分化することによる誤り訂正能力への影響を分析する手がかりを示したこと

今後の研究

- 訂正不可能誤りの単調構造について
  - １次Reed-Muller符号の重み $d/2$, $d/2+1$ の訂正不可能誤り数導出法のさらなる適用
    - 重み ≧ $d/2+2$
    - その他の符号（2次以上のReed-Muller符号、BCH符号）
  - 一般の符号に対する結果を拡張し、重み≧$d/2$ の訂正可能誤り数のよりよい上界・下界
- 局所重み分布の導出について
  - レートが高い符号に対する、局所重み分布導出法

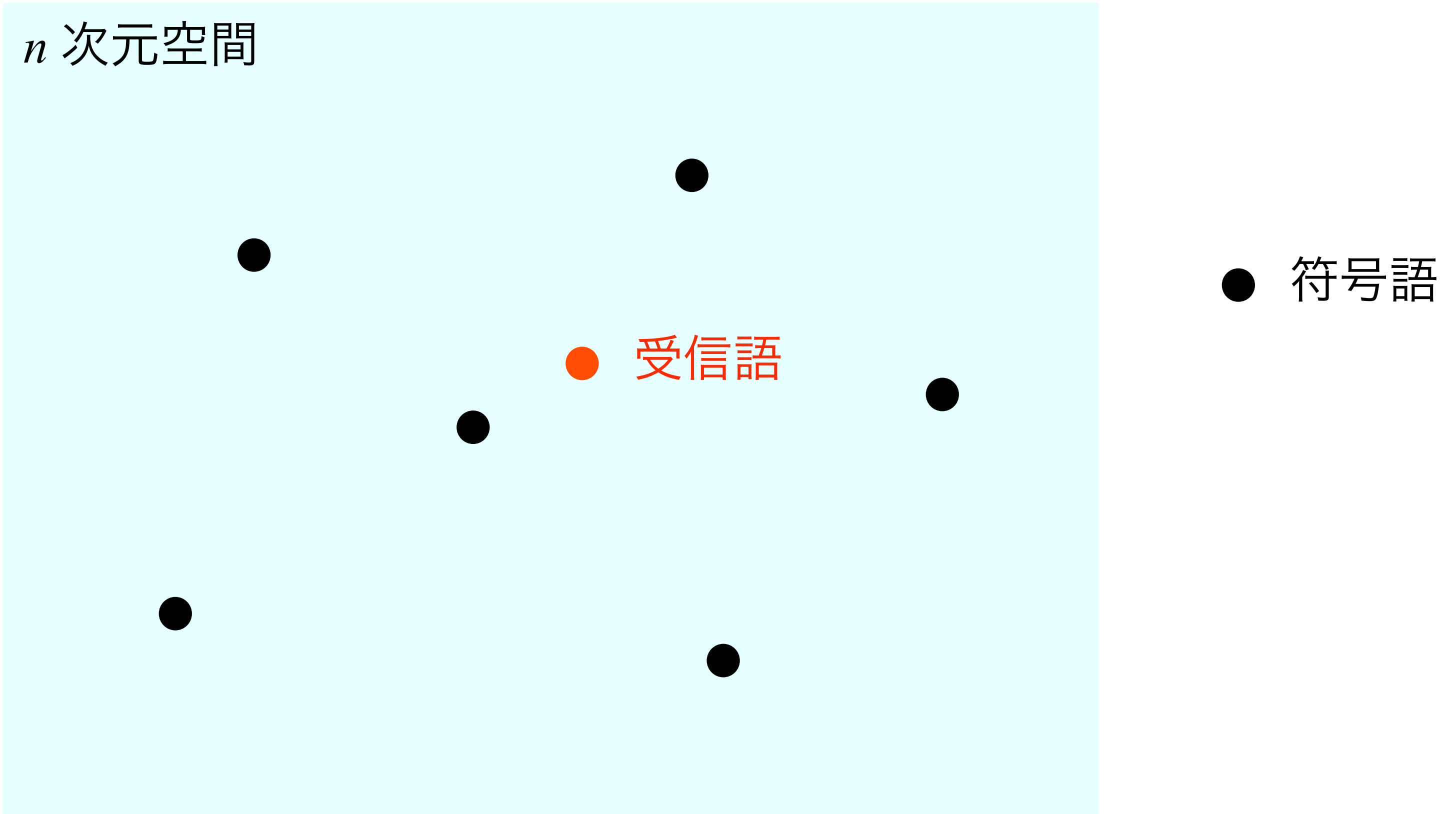
本研究で考える復号法

- 受信語に最も近い符号語に復号する方法



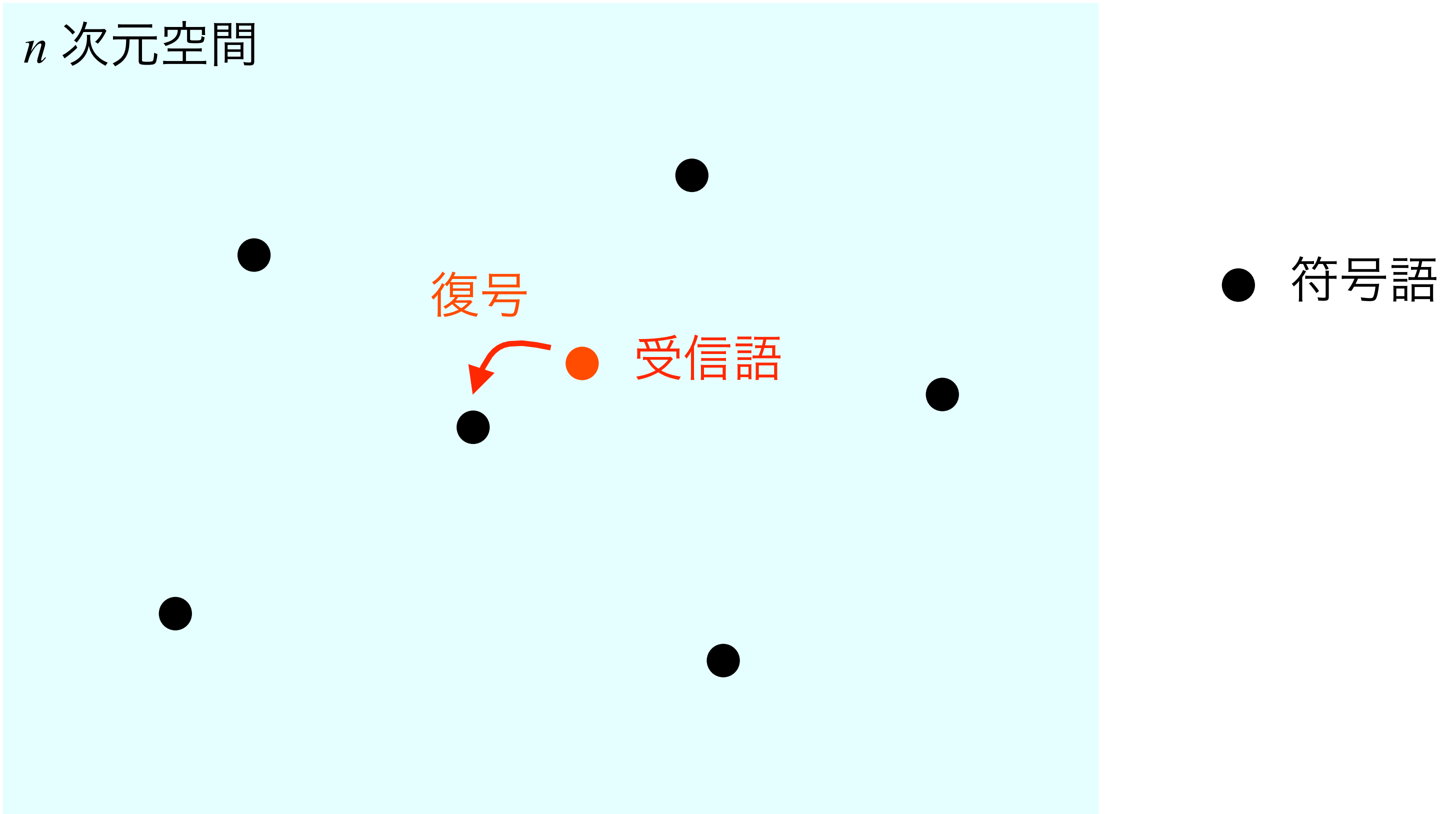
本研究で考える復号法

- 受信語に最も近い符号語に復号する方法



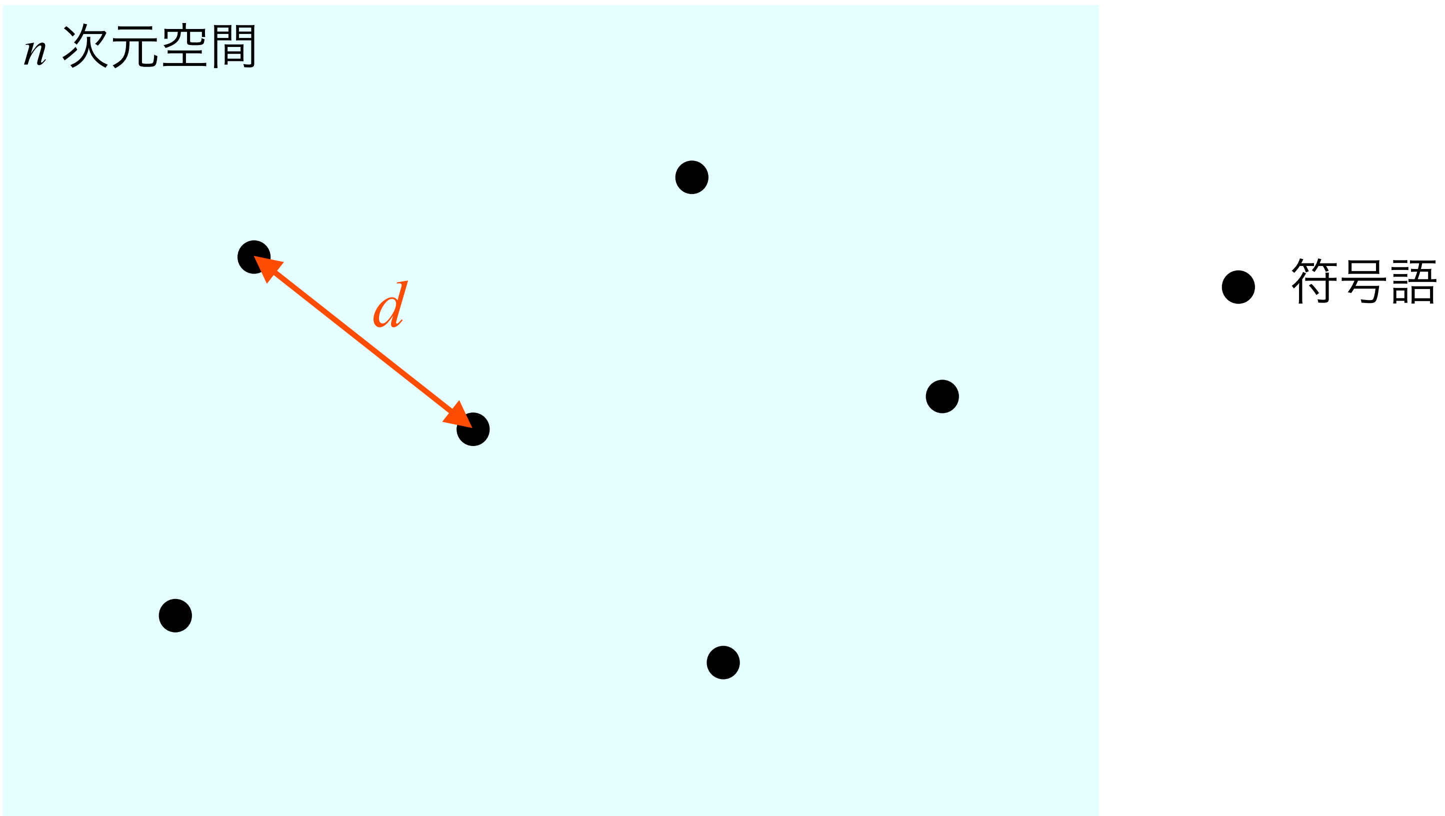
本研究で考える復号法

- 受信語に最も近い符号語に復号する方法



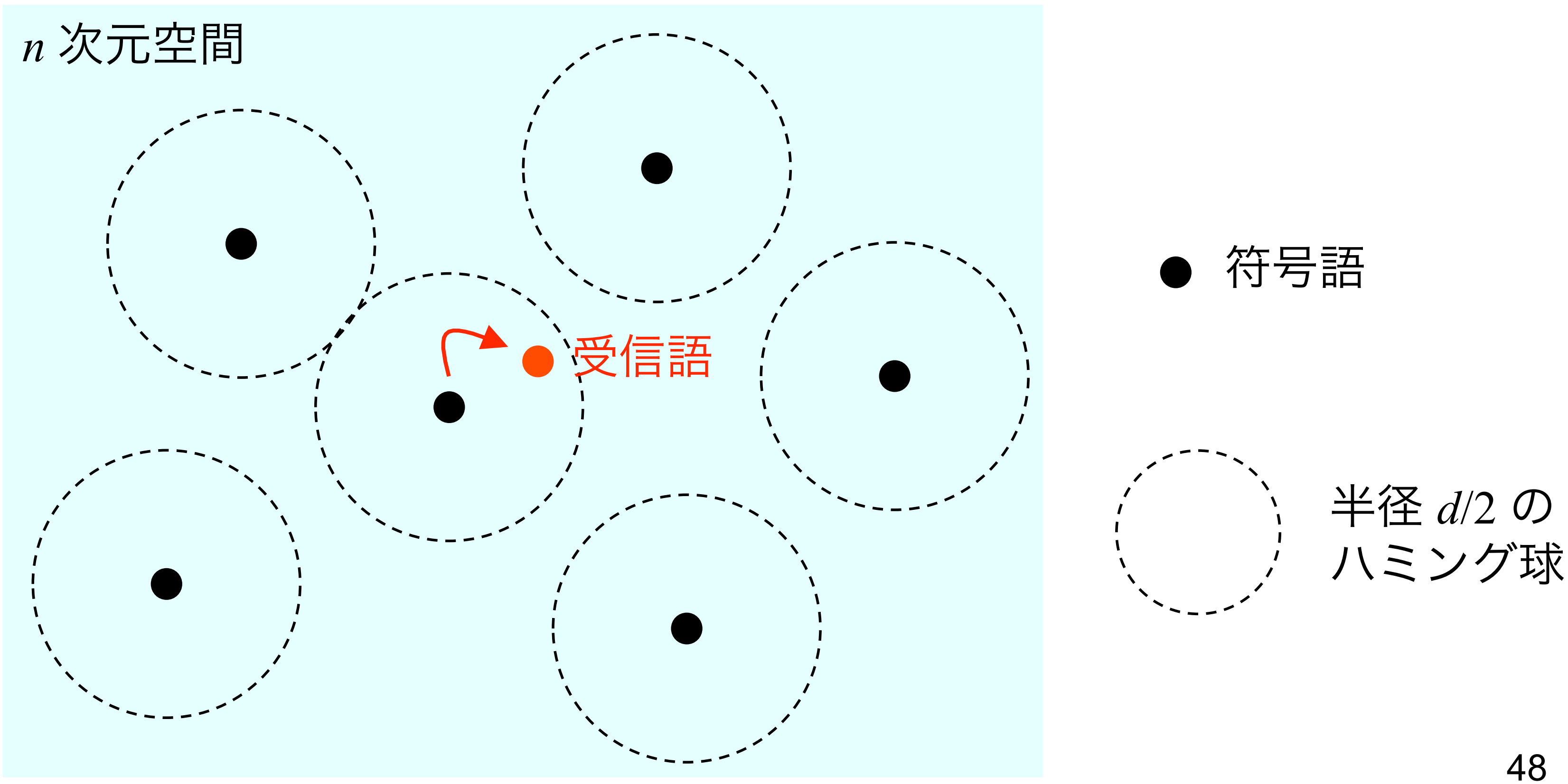
符号の最小距離

- 最小距離 d ： すべての符号語間の最小ハミング距離
- (誤りベクトルの重み) $< d/2 \Rightarrow$ 100%誤り訂正可能



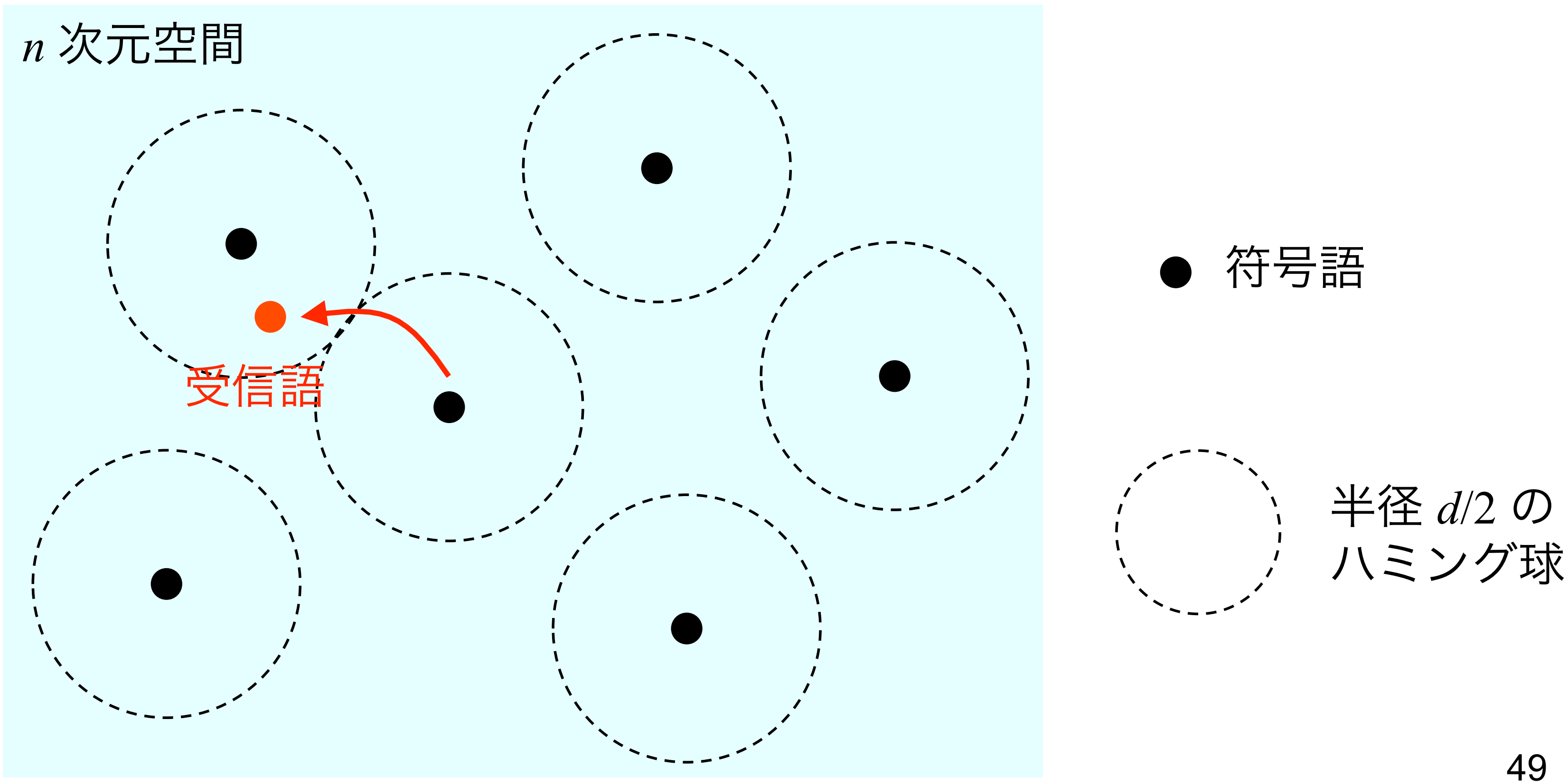
最小距離

- 最小距離 d ： すべての符号語間の最小ハミング距離
- (誤りベクトルの重み) $< d/2 \Rightarrow$ 100%誤り訂正可能



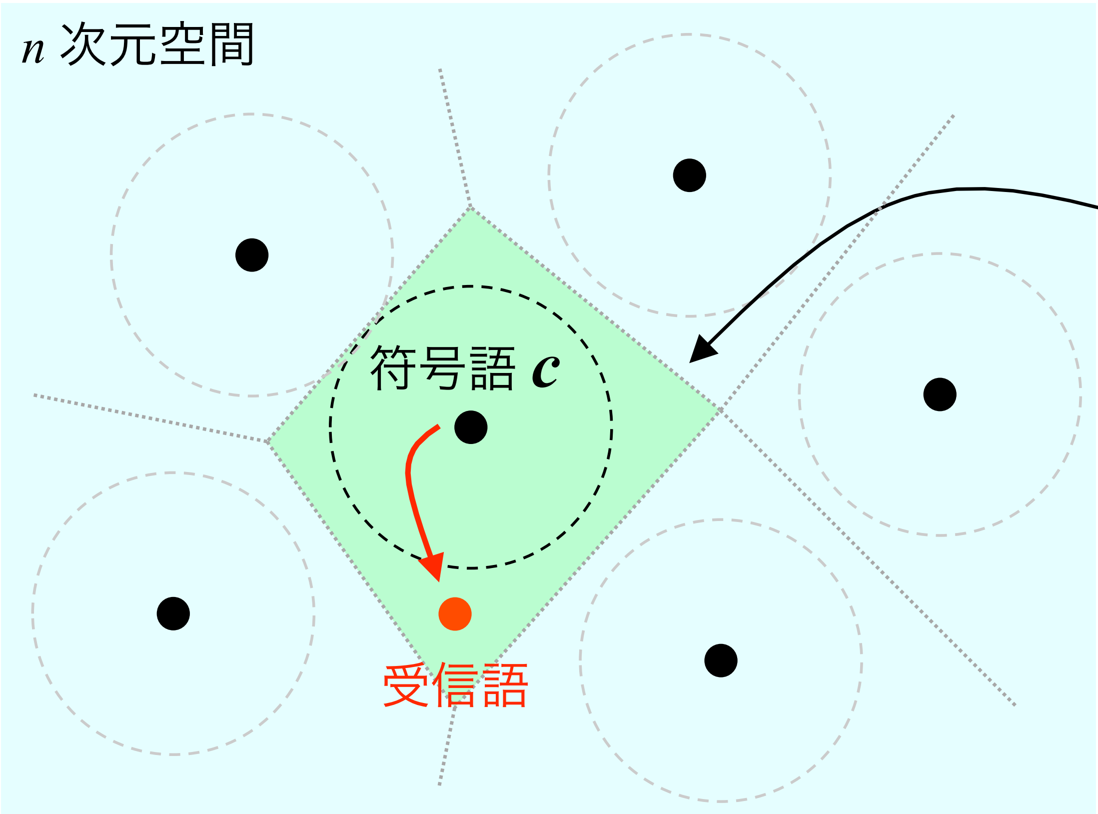
(誤りベクトルの重み)≧ $d/2$ のとき

- 他の符号語に復号してしまう可能性



(誤りベクトルの重み)≧ $d/2$ のとき

- 他の符号語に復号してしまう可能性
- しかし、多くの誤りを訂正可能(特に $d/2$ 付近)
  - 重み ≧ $d/2$ の誤りの訂正能力分析 ＝ 符号の訂正能力限界を知る



空間内で
符号語 c への距離が
最も近い領域

第3章におけるその他の成果

- １次Reed-Muller符号に対し
  (成果3) 極小訂正不可能誤り $M^1(C)$ の重み分布を導出

- 一般の符号について
  (成果4) 最小トライアル集合のサイズの上界・下界を導出

1次Reed-Muller符号に対する成果

1 次Reed-Muller符号（符号長 2^m ）に対し

（成果1） 訂正可能な重み $d/2$ の誤りベクトルの数を導出

- この結果は、Wu (1998) によって既に導出されているが、LHを利用することでより単純な証明を与えた

(成果2) 訂正可能な重み $d/2+1$ の誤りベクトルの数を導出

$$|E^0_{2^{m-2}+1}(RM_m)| = \binom{2^m}{2^{m-2}+1} - 4(2^m-1)(2^{m-3}+1)\binom{2^{m-1}}{2^{m-2}+1} + (4^{m-2}+3)\binom{2^m}{3}$$

（成果３） $M^1(C)$ の重み分布を導出

$$|M^1_i(RM_m)| = \begin{cases} (2^m-1)\binom{2^{m-1}}{2^{m-2}} - \binom{2^m-1}{2} & \text{for } i = 2^{m-2} \\ 2(2^m-1)\binom{2^{m-1}-1}{2^{m-2}+1} - (2^{m-2}-1)\binom{2^m-1}{2} & \text{for } i = 2^{m-2}+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

トライアル集合についての成果

トライアル集合 T

- $M^1(C) \subseteq LH(T)$ を満たす $T \subseteq C \setminus \{\mathbf{0}\}$
  - T の重み分布から訂正不可能誤り数の上界
  - 最適復号に利用

一般の符号に対し、

(成果4) 最小トライアル集合のサイズの上界・下界を導出

(成果5) すべての最小重み符号語がトライアル集合に含まれる
ための十分条件を導出 $\Rightarrow$ いくつもの符号が満たしている

（成果6） (成果5)の条件を満たす符号に対し、

C_d : C の最小重み符号語集合
$E^1_{d/2}(C)$: 重み $d/2$ の訂正不可能誤り集合, d は偶数

$$\left(\frac{1}{2}\binom{d}{d/2} - |C_d|\right)|C_d| \le |E^1_{d/2}(C)| \le \frac{1}{2}\binom{d}{d/2}|C_d|$$

重み $d/2$ の訂正不可能誤りについての上界・下界

提案アルゴリズムの概略

(Step 1) C' を選択

(Step 2) C/C' を利用し、同型な符号語をできるだけ探す

(Step 3) 各同型符号語の代表に対し、極小性を検査

C' の選択

- 計算時間に影響
  - C' を大きくとる　→　(Step 2) が小, (Step 3) が大
  - C' を小さくとる　→　(Step 2) が大, (Step 3) が小