# 挿入・削除訂正符号のサイズの上下界式

安永 憲司

東京工業大学

# Levenshtein 距離

$d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ := min { $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ に変換するのに必要な挿入・削除数 }

- 例. $d_L(000, 111) = 6$, $d_L(101, 010) = 2$
- $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = n$ のとき, $0 \le d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le 2n$

符号 $C$ の最小 Levenshtein 距離： $d_L(C) \coloneqq \min_{\boldsymbol{c}_1 \neq \boldsymbol{c}_2 \in C} d_L(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$

$d_L(C) \ge d$ のとき, $C$ は合計 $t \le \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ 個の挿入・削除を訂正できる

- $C \subseteq \Sigma^n$ のとき, $d_L(C)$ は偶数で, $t \le \frac{d_L(C)}{2} - 1$ 個を訂正できる
- 相対最小距離は $\frac{d_L(C)}{2n} \in [0,1]$
- 符号の相対最小距離 $\ge \delta$ ➔ $\delta$ 割合未満の挿入・削除を訂正

# 最良の符号サイズ $A_q(n,d)$

$A_q(n,d) \coloneqq \max\{\, |C| : \exists C \subseteq \Sigma^n \text{ s.t. } |\Sigma| = q, d_L(C) \geq d \,\}$

- $A_q(n,d)$ の上界式 ➔ 符号として存在しない領域
- $A_q(n,d)$ の下界式 ➔ 符号として存在しうる領域

<u>漸近的な評価</u>

- 符号長 $n \to \infty$ の場合の振る舞いを評価
- $A_q(n,d)$ を達成する符号 $C \subseteq \Sigma^n$ に対し,

  符号化率 $R = \log_q |C|$ と相対最小距離 $\delta = \frac{d_L(C)}{2n}$ の

  トレードオフを明らかにしたい

# 基本的な事実（その１）

挿入球 $I_t(\boldsymbol{x}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{x}$ に $t$ 挿入してできる $\Sigma$ 上の文字列 $\boldsymbol{y}\,\}$

- $|I_t(\boldsymbol{x})| = \sum_{i=0}^{t}\binom{n+t}{i}(q-1)^i \coloneqq I_q(n,t) \approx q^{(n+t)H_q\left(\frac{t}{n+t}\right)}$

削除球 $D_t(\boldsymbol{x}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{x}$ から $t$ 削除してできる文字列 $\boldsymbol{y}\,\}$

- $|D_t(\boldsymbol{x})| \le \binom{|\boldsymbol{x}|}{t}$
- $\boldsymbol{x}$ のラン数 $= r(\boldsymbol{x}) \ge 2t$ のとき， $\sum_{i=0}^{t}\binom{r(x)-t}{i} \le |D_t(\boldsymbol{x})| \le \binom{r(x)+t-1}{t}$
  - 例． $r(0000)=1,\ r(0011)=2,\ r(0101)=4$
- $R_q(n,r) \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \Sigma^n : r(x) = r\},\ |R_q(n,r)| = \binom{n-1}{r-1}q(q-1)^{r-1}$

# 基本的な事実（その２）

挿入削除球 $L_{t,s}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \{\, \boldsymbol{x}$ に $t$ 削除・$s$ 挿入してできる文字列 $\boldsymbol{y} \,\}$

- $L_{t,0}(\boldsymbol{x}) = D_t(\boldsymbol{x}),\ L_{0,t}(\boldsymbol{x}) = I_t(\boldsymbol{x})$

$|L_{t,t}(\boldsymbol{x})|$ の緊密な評価式は未解決問題

- $\left|L_{t,t}(\boldsymbol{x})\right| \le |D_t(\boldsymbol{x})| \cdot I_q\,(n-t,t)$　が上界では最も良い？？

二重数え上げ (double counting) より，以下が成り立つ

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\Sigma^{n+t}} |D_t(\boldsymbol{y})| = \sum_{\boldsymbol{x}\in\Sigma^{n}} |I_t(\boldsymbol{x})| = q^n \cdot I_q(n,t)$$

# 球充填 (sphere-packing) タイプの上界式

**Theorem 1.** 最小 Levenshtein 距離 $d = 2(t+1)$ の $C \subseteq \Sigma^n$ に対し,

$$|C| \leq \left\lfloor \frac{q^{n+t}}{I_q(n,t)} \right\rfloor$$

証明：各 $\boldsymbol{c} \in C$ に対し， $I_t(\boldsymbol{c}) \subseteq \Sigma^{n+t}$ は互いに交わらないため

**Corollary 1.** 最小 Levenshtein 距離 $\delta n$, 符号化率 $R$ の $C \subseteq \Sigma^n$ に対し,

$$R \leq (1+\delta)\left(1 - H_q\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)\right) + o(1)$$

# 主結果その１：Elias タイプの上界式

**Theorem 2.** 最小 Levenshtein 距離 $d < 2n$ の $C \subseteq \Sigma^n$ について,

$$t < \frac{nd}{2n-d}$$

を満たす任意の $t \geq 0$ に対し,

$$|C| \leq \left\lfloor \frac{(n+t)d}{(n+t)d - 2nt} \cdot \frac{q^{n+t}}{I_q(n,t)} \right\rfloor$$

**Corollary 2.** 最小 Levenshtein 距離 $\delta n$, 符号化率 $R$ の $C \subseteq \Sigma^n$ に対し,

$$R \leq \frac{1}{1-\delta}\Big(1 - H_q(\delta)\Big) + o(1)$$

# Theorem 2 の証明

- 二重数え上げを，符号 $C$ との共通部分に適用すると，

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\Sigma^{n+t}} |D_t(\boldsymbol{y})\cap C| = \sum_{\boldsymbol{x}\in C} |I_t(\boldsymbol{x})| = |C|\cdot I_q(n,t)$$

- ランダムに $\boldsymbol{y}\in\Sigma^{n+t}$ を選ぶと，$|D_t(\boldsymbol{y})\cap C| \geq \frac{|C|\cdot I_q(n,t)}{q^{n+t}}$ を満たす $\boldsymbol{y}\in\Sigma^{n+t}$ が存在
- $|D_t(\boldsymbol{y})\cap C|$ は半径 t のリスト復号のリストサイズ
- [Hayashi, Yasunaga (IEEE IT 2020)] のリストサイズ可能性を適用
  - $t < \frac{nd}{2n-d}$ に対し，$|D_t(\boldsymbol{y})\cap C| \leq \frac{(n+t)d}{(n+t)d-2nt}$

# Hamming 距離の符号に対する上界式の適用

符号 $C$ の最小 Hamming 距離 $\leq d$

➔ $C$ の最小 Levenshtein 距離 $\leq 2d$

Hamming 距離での $A_q(n,d)$ の上界式

➔ Levenshtein 距離での $A_q(n,d)$ の上界式

**Theorem 3.** 最小 Levenshtein 距離 $\delta n$, 符号化率 $R$ の $C \subseteq \Sigma^n$ に対し,

$$R \leq 1 - H_q\left(\theta - \sqrt{\theta(\theta - \delta)}\right) + o(1) \quad \text{（Elias 限界）}$$

$$R \leq H_q\left(\frac{1}{q}\left(q - 1 - (q-2)\delta - 2\sqrt{\delta(1-\delta)(q-1)}\right)\right) + o(1) \quad \text{（MRRW 限界）}$$

ここで, $0 \leq \delta \leq \theta = 1 - \frac{1}{q}$

# 平均球サイズによる下界式

Tolhuizen (IEEE IT 1997). $X$ 上の距離関数 $\rho: X\times X \to \mathbb{Z}$ に対し,

- $\boldsymbol{x}$ 中心の半径 $d$ の球サイズ　$V_d(\boldsymbol{x}) \coloneqq |\{\boldsymbol{y} \in X: \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le d\}|$
- 平均球サイズ $V_d^{\mathrm{ave}} \coloneqq \frac{1}{|X|}\sum_{\boldsymbol{x}\in X} V_d(\boldsymbol{x})$

のとき，最小距離 $d$ の符号 $C$ として，　$|C| \ge \frac{|X|}{V_{d-1}^{\mathrm{ave}}}$ が存在

Levenshtein (ISIT 2002). 任意の $1 \le t \le n$ に対し,
以下を満たす最小距離 $d = 2(t+1) = 2\delta n$ の符号 $C$ が存在.

$|C| \ge \frac{q^{n+t}}{I_q(n-t,t)^2}$　　つまり　符号化率 $R \ge 1 + \delta - 2H_q(\delta)$

# グラフ理論による下界式

集合 $X \subseteq \Sigma^n$ に対し，グラフ $G = (V, E)$ を

- 各 $\boldsymbol{x} \in X$ が頂点，　$d_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d - 1$ なら辺 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が存在

と定めると，

- $G$ の独立集合の最大サイズ $= \alpha(G) \quad \Leftrightarrow \quad A_q(n, d) = \alpha(G)$

- 独立数 (independence number) $\alpha(G)$ に関する
グラフ理論の結果が利用できる
  - Turán の定理より GV 限界が導かれる (Tohluizen (1997))
  - Jiang, Vardy (IEEE IT 2004) による GV 限界の改良もこれ

# Caro-Wei 限界による下界式

**Caro-Wei 限界**

$$\alpha(G) \geq \sum_{x \in V} \frac{1}{1+\deg(x)}$$

**Theorem 5.** 任意の $d = 2(t+1) < n$, 整数 $1 \leq r \leq n$ に対し,

$$A_q(n,d) \geq \left\lfloor \frac{\left(q^n - \sum_{i=r}^{n} \binom{n-1}{i-1} q(q-1)^{i-1}\right)^2}{I_q(n-t,t)\left(q^{n-t} \cdot I_q(n,t) - \sum_{i=r}^{n} \binom{n-1}{i-1} q(q-1)^{i-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{t} \binom{i-t}{j}\right)\right)} \right\rfloor$$

証明：集合 $X \subseteq \Sigma^n$ をラン数 $r$ 以上の文字列集合とし,
Caro-Wei 限界に $\deg(x) \leq \left|L_{t,t}(\boldsymbol{x})\right| \leq |D_t(\boldsymbol{x})| \cdot I_q(n-t,t)$ を適用

## Sala, Gabrys, Dolecek (ISIT 2014) の下界式（式自体は省略）

グラフの三角形数 $T$ を用いた以下を利用（ $\Delta$ は最大次数）

$$\alpha(G) \geq \frac{|V|}{10\Delta}\left(\log\Delta - \frac{1}{2}\log\left(\frac{T}{|V|}\right)\right)$$

Jiang, Vardy (2004) は $\frac{T}{|V|}$ の上界を与えて GV 限界を $\log n$ 倍改善

Sala, Gabrys, Dolecek (ISIT 2014) も漸近的に $\log n$ 倍改善

> However, the present work is focused on non-asymptotic bounds. To the best of the authors' knowledge, Theorem 1 is so far the strongest lower bound on deletion-correcting codes, with an improvement on the order of log n over all existing bounds, in both the asymptotic and non-asymptotic cases.

との記載はあるが・・・

# 平均挿入・削除球サイズ上界の改良による下界

Levenshtein (ISIT 2002) は

$$\left|L_{t,t}(\boldsymbol{x})\right| \leq |D_t(\boldsymbol{x})| \cdot I_q\ (n-t,t)$$

から，以下を利用

$$V_d^{\mathrm{ave}} := \frac{1}{|\Sigma^n|}\sum_{\boldsymbol{x}\in\Sigma^n}\left|L_{t,t}(\boldsymbol{x})\right| \leq \frac{I_q(n-t,t)}{q^n}\sum_{\boldsymbol{x}\in\Sigma^n}|D_t(\boldsymbol{x})| = \frac{I_q(n-t,t)^2}{q^t}$$

➔ 平均挿入・削除球サイズ $\left|L_{t,t}(\boldsymbol{x})\right|$ の上界の改良を目指す

## $|L_{t,t}(\boldsymbol{x})|$ の上界の改良

アイディア：数え上げの重複を考える

$D_t(00011110000111)$ において，

$\boldsymbol{x} = 00011110000111$ の黒い部分を削除したものを $\boldsymbol{y}$ とおく．

オレンジのペアの片方を一つずつ削除すると，
その結果 $\boldsymbol{z}$ は $2^3 = 8$ 通りあり，すべて $\boldsymbol{y}$ の部分文字列

➔ 各 $|I_t(\boldsymbol{z})|$ において，$|I_{t-3}(\boldsymbol{y})|$ は重複して数え上げられている

➔ $7|I_{t-3}(\boldsymbol{y})|$ は数えなくてよい

## 主結果その２：平均挿入・削除球サイズ上界の改良による下界

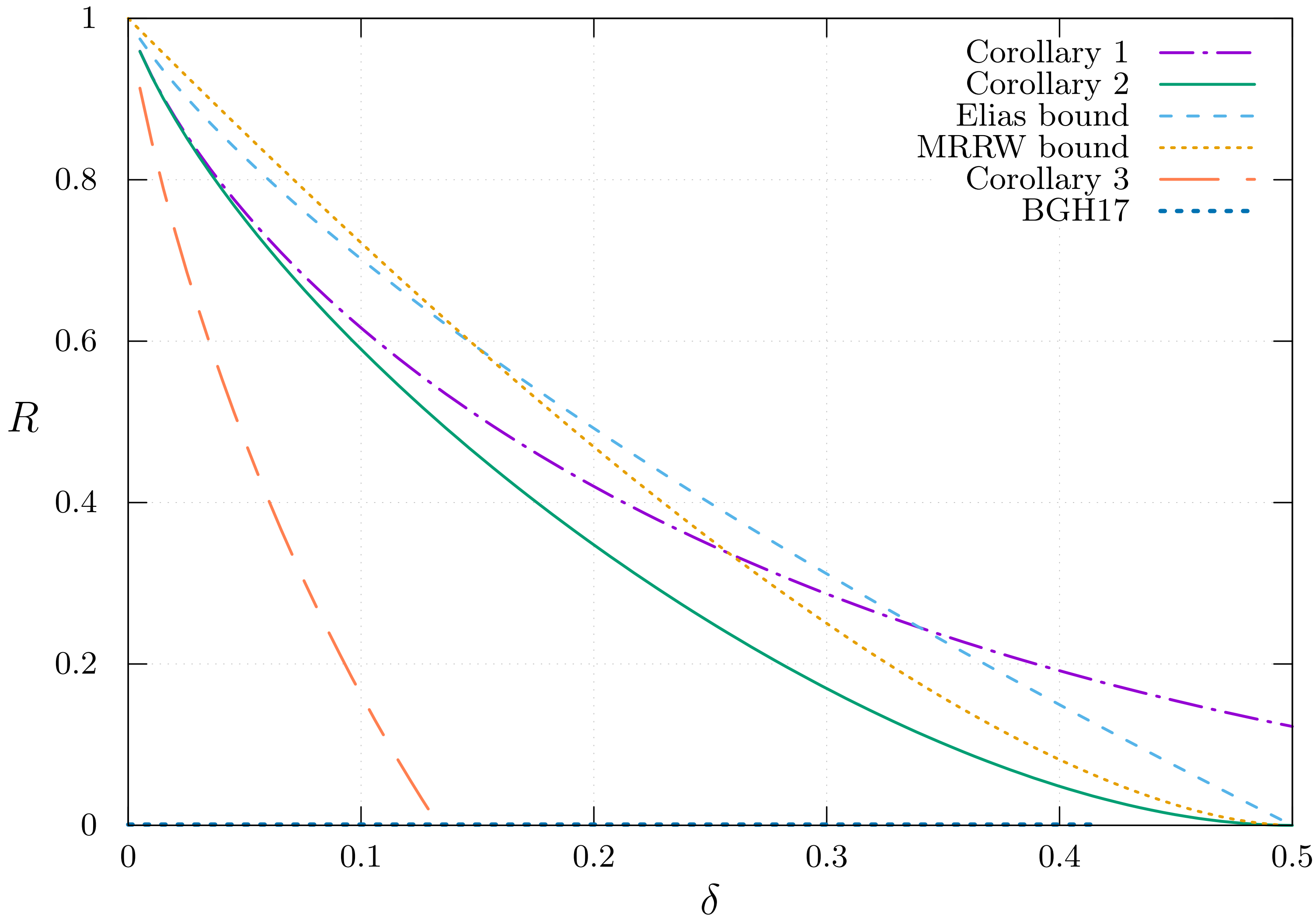
ラン数 $r(\boldsymbol{x}) \geq 2$ のときオレンジペアが１つ以上あることを利用

Corollary 3. 任意の $1 \leq t \leq n$ に対し，以下を満たす
最小距離 $d = 2(t+1)$ の符号 $C$ が存在.

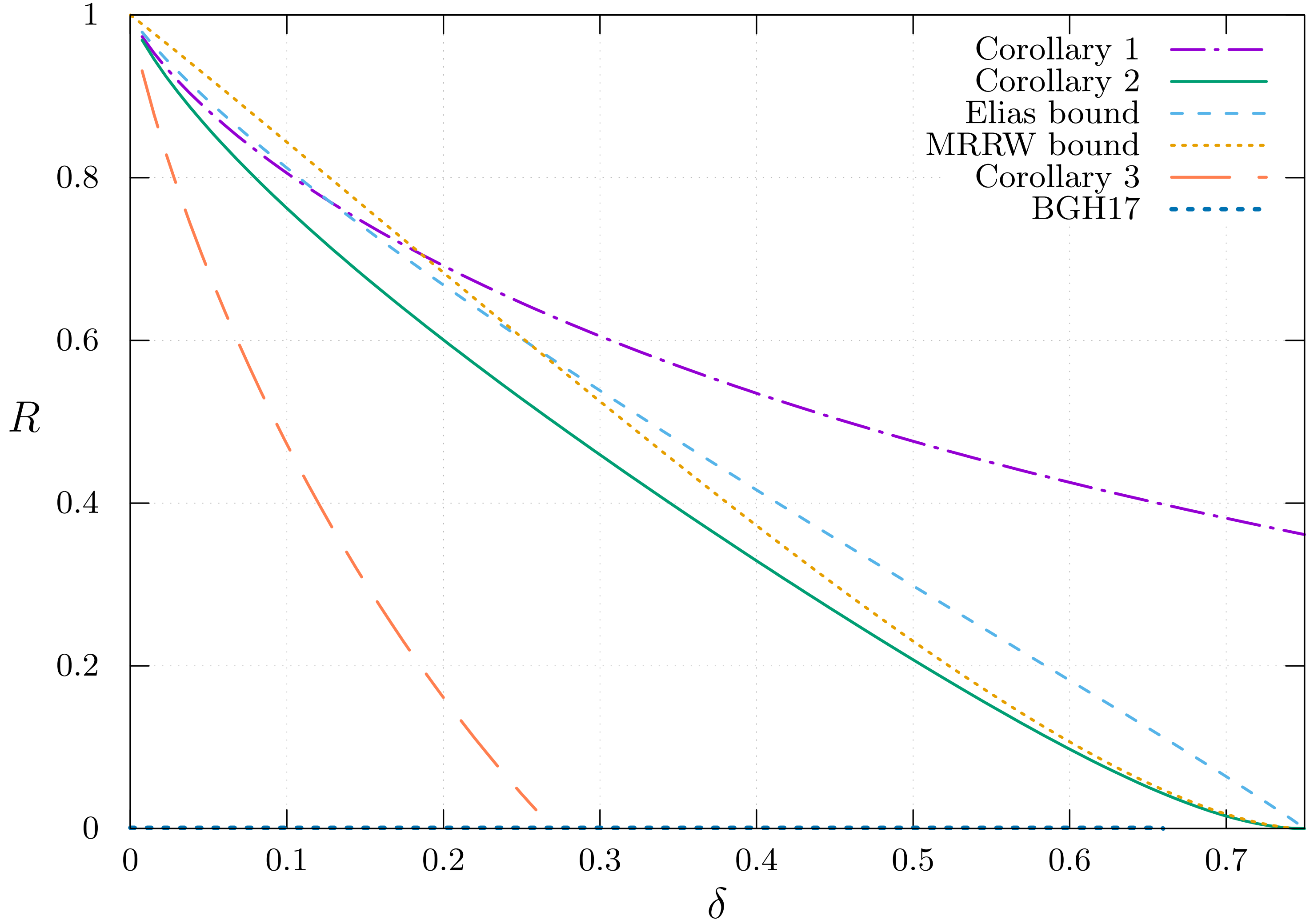
$$A_q(n,d) \geq \left\lfloor \frac{q^{n+t}}{I_q(n-t,t)^2 - q^{-(n-t)}(q^n - q)I_q(n-t+1,t-1)} \right\rfloor$$

符号化率は Levnshtein(2002) と同様で，　$R \geq 1 + \delta - 2H_q(\delta)$

# 符号化率と相対最小距離のトレードオフ：$q = 2$



# 符号化率と相対最小距離のトレードオフ：$q = 4$



# 数値計算結果：上界

| $q$ | $n$ | $d$ | UB of [12] | Theorem 1 | Theorem 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 10 | 4 | 190 | 170 | 311 |
| 2 | 10 | 6 | 148 | 51 | 93 |
| 2 | 10 | 8 | 148 | 21 | 38 |
| 2 | 10 | 10 | 156 | 11 | 17 |
| 2 | 10 | 12 | 292 | 6 | 9 |
| 2 | 10 | 14 | 528 | 4 | 5 |
| 2 | 10 | 16 | 772 | 3 | 4 |
| 2 | 10 | 18 | 936 | 2 | 3 |
| 2 | 20 | 4 | 97 453 | 95 325 | 181 643 |
| 2 | 20 | 6 | 33 903 | 16 513 | 31 402 |
| 2 | 20 | 8 | 26 456 | 4 096 | 7 772 |
| 2 | 20 | 10 | 26 456 | 1 295 | 2 452 |
| 2 | 20 | 14 | 26 456 | 213 | 287 |
| 2 | 20 | 18 | 91 688 | 56 | 54 |
| 2 | 20 | 22 | 340 556 | 20 | 16 |
| 2 | 20 | 26 | 709 300 | 9 | 7 |
| 2 | 20 | 30 | 961 048 | 5 | 4 |
| 2 | 20 | 34 | 1 038 520 | 3 | 3 |
| 2 | 20 | 38 | 1 048 198 | 2 | 2 |
| 2 | 40 | 4 | 47 498 012 376 | 52 357 696 560 | 102 167 009 660 |
| 2 | 40 | 8 | 2 063 338 945 | 661 957 632 | 1 290 214 063 |
| 2 | 40 | 12 | 1 130 893 408 | 25 385 916 | 49 417 671 |
| 2 | 40 | 16 | 1 122 371 648 | 1 867 567 | 2 644 775 |
| 2 | 40 | 20 | 1 122 371 648 | 215 900 | 203 859 |
| 2 | 40 | 30 | 13 097 807 352 | 3 735 | 1 195 |
| 2 | 40 | 40 | 287 193 094 240 | 231 | 43 |
| 2 | 40 | 50 | 914 362 931 844 | 33 | 8 |
| 2 | 40 | 60 | 1 094 302 526 208 | 8 | 4 |
| 2 | 40 | 70 | 1 099 503 766 738 | 3 | 3 |
| 2 | 40 | 78 | 1 099 511 626 218 | 2 | 2 |

| $q$ | $n$ | $d$ | UB of [12] | Theorem 1 | Theorem 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 4 | 62 908 | 123 361 | 159 529 |
| 4 | 10 | 6 | 17 792 | 26 588 | 34 357 |
| 4 | 10 | 8 | 9 600 | 7 928 | 7 547 |
| 4 | 10 | 10 | 5 504 | 2 925 | 1 659 |
| 4 | 10 | 12 | 11 504 | 1 257 | 372 |
| 4 | 10 | 14 | 51560 | 608 | 87 |
| 4 | 10 | 16 | 173840 | 322 | 24 |
| 4 | 10 | 18 | 418736 | 184 | 10 |
| 4 | 20 | 4 | 30 003 945 118 | 68 719 476 736 | 90 174 299 388 |
| 4 | 20 | 6 | 2 902 217 544 | 8 197 663 580 | 10 754 599 022 |
| 4 | 20 | 8 | 752 550 391 | 1 402 773 785 | 1 839 884 106 |
| 4 | 20 | 10 | 360 221 648 | 306 647 351 | 316 287 316 |
| 4 | 20 | 14 | 146 887 008 | 24 329 793 | 11 105 216 |
| 4 | 20 | 18 | 108 563 408 | 3 094 985 | 409 222 |
| 4 | 20 | 22 | 2 517 203 000 | 549 256 | 16 755 |
| 4 | 20 | 26 | 31 608 638 744 | 125 240 | 851 |
| 4 | 20 | 30 | 192 278 071 952 | 34 771 | 71 |
| 4 | 20 | 34 | 587 772 208 784 | 11 321 | 15 |
| 4 | 20 | 38 | 977 086 753 268 | 4 206 | 7 |
| 4 | 40 | 10 | $\approx 6\ 113 \times 10^{15}$ | $\approx 27\ 238 \times 10^{15}$ | $\approx 36\ 015 \times 10^{15}$ |
| 4 | 40 | 12 | $\approx 1\ 502 \times 10^{15}$ | $\approx 4\ 001 \times 10^{15}$ | $\approx 5\ 290 \times 10^{15}$ |
| 4 | 40 | 16 | $\approx 350\ 829 \times 10^{12}$ | $\approx 135\ 888 \times 10^{12}$ | $\approx 89\ 050 \times 10^{12}$ |
| 4 | 40 | 20 | $\approx 133\ 526 \times 10^{12}$ | $\approx 7\ 269 \times 10^{12}$ | $\approx 2\ 172 \times 10^{12}$ |
| 4 | 40 | 30 | $\approx 14\ 173 \times 10^{12}$ | $\approx 18\ 554 \times 10^{9}$ | $\approx 296\ 437 \times 10^{6}$ |
| 4 | 40 | 40 | $\approx 34\ 641 \times 10^{15}$ | $\approx 173\ 431 \times 10^{6}$ | $\approx 69 \times 10^{6}$ |
| 4 | 40 | 50 | $\approx 10\ 426 \times 10^{18}$ | $\approx 3\ 882 \times 10^{6}$ | 33 642 |
| 4 | 40 | 60 | $\approx 306\ 026 \times 10^{18}$ | 164 423 496 | 108 |
| 4 | 40 | 70 | $\approx 1\ 074 \times 10^{21}$ | 11 354 434 | 10 |
| 4 | 40 | 78 | $\approx 1\ 207 \times 10^{21}$ | 1 777 074 | 5 |

# 数値計算結果：下界

| $q$ | $n$ | $d$ | LB of [12] | LB of [14] | Theorem 5 | Corollary 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 10 | 4 | 16 | 2 | 18 | 17 |
| 2 | 10 | 6 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 10 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 10 | 14 | — | — | — | — |
| 2 | 10 | 16 | — | — | — | — |
| 2 | 10 | 18 | — | — | — | — |
| 2 | 10 | 20 | — | — | — | — |
| 2 | 20 | 4 | 4755 | 783 | 4968 | 4777 |
| 2 | 20 | 6 | 94 | 10 | 94 | 94 |
| 2 | 20 | 8 | 4 | 0 | 4 | 4 |
| 2 | 20 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 20 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 20 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 20 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 20 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 20 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 20 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 40 | 4 | 1 308 163 745 | 244 663 405 | 1 339 190 459 | 1 309 722 010 |
| 2 | 40 | 6 | 6 524 894 | 881 891 | 6 532 808 | 6 526 482 |
| 2 | 40 | 8 | 76 814 | 6 032 | 71 601 | 76 818 |
| 2 | 40 | 10 | 1 687 | 68 | 1 396 | 1 687 |
| 2 | 40 | 12 | 60 | 1 | 42 | 60 |
| 2 | 40 | 14 | 3 | 0 | 1 | 3 |
| 2 | 40 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 40 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 40 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 40 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $q$ | $n$ | $d$ | LB of [12] | LB of [14] | Theorem 5 | Corollary 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 4 | 4 364 | 842 | 4 489 | 4 382 |
| 4 | 10 | 6 | 88 | 14 | 78 | 88 |
| 4 | 10 | 8 | 4 | 0 | 3 | 4 |
| 4 | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 10 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 10 | 14 | — | | | |
| 4 | 10 | 16 | — | | | |
| 4 | 10 | 18 | — | | | |
| 4 | 10 | 20 | — | | | |
| 4 | 20 | 4 | 1 181 952 838 | 269 953 863 | 1 200 316 339 | 1 183 224 781 |
| 4 | 20 | 6 | 5 608 964 | 1 260 800 | 5 257 096 | 5 610 710 |
| 4 | 20 | 8 | 66 412 | 11 205 | 52 137 | 66 419 |
| 4 | 20 | 10 | 1 558 | 167 | 937 | 1 558 |
| 4 | 20 | 12 | 64 | 3 | 27 | 64 |
| 4 | 20 | 14 | 4 | 0 | 1 | 4 |
| 4 | 20 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 20 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 20 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 20 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 40 | 10 | 5 251 871 945 006 | 968 893 684 250 | 4 033 370 043 313 | 5 251 878 194 182 |
| 4 | 40 | 12 | 4 408 536 581 | 5 621 632 730 | 28 003 006 604 | 4 408 537 815 |
| 4 | 40 | 14 | 562 976 279 | 46 013 071 | 281 585 593 | 562 976 323 |
| 4 | 40 | 16 | 10 353 270 | 506 907 | 3 886 646 | 10 353 271 |
| 4 | 40 | 18 | 263 527 | 7 256 | 70 970 | 263 527 |
| 4 | 40 | 20 | 9 010 | 131 | 1 673 | 9 010 |
| 4 | 40 | 22 | 404 | 2 | 50 | 404 |

# 参考文献


[2] B. Bukh, V. Guruswami, and J. Håstad. An improved bound on the fraction of correctable deletions. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 63(1):93–103, 2017.

[4] D. Cullina and N. Kiyavash. An improvement to Levenshtein's upper bound on the cardinality of deletion correcting codes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 60(7):3862–3870, 2014.

[5] V. Guruswami, X. He, and R. Li. The zero-rate threshold for adversarial bit-deletions is less than 1/2. In *62nd IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2021, Denver, CO, USA, February 7-10, 2022*, pages 727–738. IEEE, 2021.

[7] T. Hayashi and K. Yasunaga. On the list decodability of insertions and deletions. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 66(9):5335–5343, 2020.

[10] A. A. Kulkarni and N. Kiyavash. Nonasymptotic upper bounds for deletion correcting codes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 59(8):5115–5130, 2013.

[11] V. I. Levenshtein. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Soviet Physics Doklady*, 10(8):707–710, 1966.

[12] V. I. Levenshtein. Bounds for deletion/insertion correcting codes. In *Proceedings IEEE International Symposium on Information Theory*, page 370, 2002.

[14] F. Sala, R. Gabrys, and L. Dolecek. Gilbert-varshamov-like lower bounds for deletion-correcting codes. In *2014 IEEE Information Theory Workshop, ITW 2014, Hobart, Tasmania, Australia, November 2-5, 2014*, pages 147–151. IEEE, 2014.

# 数値計算結果：上界

| $q$ | $n$ | $d$ | UB of [12] | Theorem 1 | Theorem 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 10 | 4 | 190 | 170 | 311 |
| 2 | 10 | 6 | 148 | 51 | 93 |
| 2 | 10 | 8 | 148 | 21 | 38 |
| 2 | 10 | 10 | 156 | 11 | 17 |
| 2 | 10 | 12 | 292 | 6 | 9 |
| 2 | 10 | 14 | — | — | 5 |
| 2 | 10 | 16 | — | — | 4 |
| 2 | 10 | 18 | — | — | 3 |
| 2 | 10 | 20 | — | — | — |
| 2 | 20 | 4 | 97 453 | 95 325 | 181 643 |
| 2 | 20 | 6 | 33 903 | 16 513 | 31 402 |
| 2 | 20 | 8 | 26 456 | 4 096 | 7 772 |
| 2 | 20 | 10 | 26 456 | 1 295 | 2 452 |
| 2 | 20 | 12 | 26 456 | 490 | 768 |
| 2 | 20 | 14 | 26 456 | 213 | 287 |
| 2 | 20 | 16 | 41 520 | 104 | 118 |
| 2 | 20 | 18 | 91 688 | 56 | 54 |
| 2 | 20 | 20 | 190 416 | 32 | 28 |
| 2 | 20 | 22 | 340 556 | 20 | 16 |
| 2 | 40 | 4 | 47 498 012 376 | 52 357 696 560 | 102 167 009 660 |
| 2 | 40 | 6 | 6 561 107 408 | 4 865 095 698 | 9 488 059 400 |
| 2 | 40 | 8 | 2 063 338 945 | 661 957 632 | 1 290 214 063 |
| 2 | 40 | 10 | 1 279 636 864 | 117 292 187 | 228 473 245 |
| 2 | 40 | 12 | 1 130 893 408 | 25 385 916 | 49 417 671 |
| 2 | 40 | 14 | 1 122 371 648 | 6 445 783 | 12 539 381 |
| 2 | 40 | 16 | 1 122 371 648 | 1 867 567 | 2 644 775 |
| 2 | 40 | 18 | 1 122 371 648 | 605 094 | 754 358 |
| 2 | 40 | 20 | 1 122 371 648 | 215 900 | 203 859 |
| 2 | 40 | 22 | 1 122 371 648 | 83 817 | 65 257 |

| $q$ | $n$ | $d$ | UB of [12] | Theorem 1 | Theorem 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 4 | 62 908 | 123 361 | 159 529 |
| 4 | 10 | 6 | 17 792 | 26 588 | 34 357 |
| 4 | 10 | 8 | 9 600 | 7 928 | 7 547 |
| 4 | 10 | 10 | 5 504 | 2 925 | 1 659 |
| 4 | 10 | 12 | 11 504 | 1 257 | 372 |
| 4 | 10 | 14 | — | — | 87 |
| 4 | 10 | 16 | — | — | 24 |
| 4 | 10 | 18 | — | — | 10 |
| 4 | 10 | 20 | — | — | — |
| 4 | 20 | 4 | 30 003 945 118 | 68 719 476 736 | 90 174 299 388 |
| 4 | 20 | 6 | 2 902 217 544 | 8 197 663 580 | 10 754 599 022 |
| 4 | 20 | 8 | 752 550 391 | 1 402 773 785 | 1 839 884 106 |
| 4 | 20 | 10 | 360 221 648 | 306 647 351 | 316 287 316 |
| 4 | 20 | 12 | 226 003 920 | 80 420 755 | 60 876 276 |
| 4 | 20 | 14 | 146 887 008 | 24 329 793 | 11 105 216 |
| 4 | 20 | 16 | 79 778 144 | 8 267 148 | 2 003 849 |
| 4 | 20 | 18 | 108 563 408 | 3 094 985 | 409 222 |
| 4 | 20 | 20 | 536 774 720 | 1 258 226 | 79 926 |
| 4 | 20 | 22 | 2 517 203 000 | 549 256 | 16 755 |
| 4 | 40 | 10 | 6 113 592 833 576 549 294 | 27 238 444 999 469 732 769 | 36 015 920 136 083 097 898 |
| 4 | 40 | 12 | 1 502 985 120 942 552 080 | 4 001 768 904 009 233 099 | 5 290 974 980 372 832 578 |
| 4 | 40 | 14 | 694 833 352 099 147 362 | 690 127 171 352 978 162 | 628 749 366 837 598 021 |
| 4 | 40 | 16 | 350 829 440 062 284 900 | 135 888 933 076 115 960 | 89 050 511 830 036 160 |
| 4 | 40 | 18 | 205 583 936 785 834 080 | 29 940 446 039 885 620 | 13 234 636 413 304 032 |
| 4 | 40 | 20 | 133 526 342 747 906 144 | 7 269 429 537 145 809 | 2 172 089 508 608 137 |